Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 519.48 *МАТЕМАТИКА*

Д. А. РАЙКОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КАТЕГОРИЙ СООТВЕТСТВИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 11 II 1972)

В этой заметке описываются класс C категорий соответствий и класс F категорий, связанные друг с другом так же, как класс категорий соответствий, удовлетворяющих аксиомам K1—K6 Д. Пуппе ([1]), и класс A (локально малых) абелевых категорий. Но класс F значительно шире, чем A. Он содержит все γ-категории М. С. Бургина с конечными произведениями ([2], [3]) (и тем самым многие важные категории некоммутативной алгебры), все (локально малые) полуабелевы категории ([4]) (и в том числе такие категории коммутативной топологической алгебры и функционального анализа, как категории топологических абелевых групп и топологических линейных пространств), а кроме того и некоторые важные категории некоммутативной топологической алгебры, в частности категорию топологических групп. При этом, хотя аксиомы класса C слабее аксиом, описывающих категории соответствий над γ-категориями с конечными произведениями, и тем более аксиом K1—K6 для категорий соответствий Пуппе, «гомологические» свойства последних, установленные в ([1]), сохраняют силу и для класса C.

Под категорией соответствий мы, следуя ([5]), понимаем категорию $\mathscr{C}$, для каждой пары (X, Y) объектов которой определены отношение (частичного) порядка в $\mathscr{C}(X, Y)$ и отображение

$$\mathscr{C}(X, Y) \ni f \mapsto f^{\#} \in \mathscr{C}(Y, X)$$

(инволюция) так, что

$$f_1 \subset f_2 \Rightarrow gf_1 \subset gf_2,$$

$$(gf)^{\#} = f^{\#}g^{\#}, \quad f^{\#\#} = f, \quad f_1 \subset f_2 \Rightarrow f_1^{\#} \subset f_2^{\#}$$

для всех объектов X, Y, Z и морфизмов (соответствий) $f_1, f_2, f \in \mathscr{C}(X, Y)$, $g \in \mathscr{C}(Y, Z)$. Квазинулевым объектом категории соответствий $\mathscr{C}$ называется такой ее объект N, что $\mathscr{C}(N, N) = \{1_N\}$ и в $\mathscr{C}(N, X)$ для каждого объекта X имеются наименьший и наибольший элементы ω_X и Ω_X. Функтор T: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, где $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ — категории соответствий с квазинулевыми объектами N и N', называется I-функтором ([1]), если он сохраняет порядок и инволюцию и переводит N в N', а $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ — I-изоморфными, если существуют взаимно обратные I-функторы T: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ и T': $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$.

I. Класс C образуют все категории соответствий $\mathscr{C}$, удовлетворяющие аксиомам C0 — C6. Вслед за каждой из этих аксиом приводятся основные ее следствия (опирающиеся и на предыдущие аксиомы).

C0 (=K1). *В $\mathscr{C}$ имеется квазинулевой объект.*

Следуя ([1]), для каждого соответствия f из $\mathscr{C}$ полагаем $Df = f^{\#}\Omega$, $Bf = f\Omega$, $Kf = f^{\#}\omega$ и $If = f\omega$. Соответствия f с $Df = \Omega$ и $If = \omega$ (названные в ([1]) собственными), мы называем функциональными. Они образуют в $\mathscr{C}$ подкатегорию $\mathscr{F} = \mathbf{F}(\mathscr{C})$, содержащую все изоморфизмы (а значит, и все объекты) из $\mathscr{C}$. Строчные греческие буквы всюду дальше означают соответствия из $\mathscr{F}$.

F0. *$\mathscr{F}$ содержит нулевой объект.*

А именно, им служит квазинулевой объект N категории $\mathscr{C}$; будем обозначать его дальше 0.

C1 (частный случай аксиомы K2). а) $Df = \Omega \Rightarrow f^{\#}f \supset 1$, б) $If = \omega \Rightarrow ff^{\#} \subset 1$.

Так как обратные импликации всегда справедливы, то соответствие f функционально тогда и только тогда, когда $f^{\#}f \supset 1$ и $ff^{\#} \subset 1$.

C2 (= K3a). *Каждое соответствие $u \in \mathscr{C}(0, X)$ представимо в виде $B\mu$, где μ — мономорфизм в $\mathscr{F}$.*

F1. *Каждый морфизм в $\mathscr{F}$ обладает ядром и каждое ядро — коядром.*

F2. *Для каждого морфизма α из $\mathscr{F}$ морфизм μ в разложении $\alpha = \mu \operatorname{cok} \ker \alpha$ (вытекающем из F1) есть мономорфизм.*

Тем самым в $\mathscr{F}$ имеется бикатегорная структура с классом Cok всех коядер в качестве класса проекций и классом M всех мономорфизмов в качестве класса инъекций.

F3. *$\mathscr{F}$ — локально малая категория, т. е. для каждого объекта X класс $S(X)$ всех его подобъектов (в смысле [6]) есть множество.*

Таким образом, $\mathscr{F}$ удовлетворяет аксиомам A1 — A3 и A5 М. С. Бургина [2]. Выполняется также A4.

C3 (следствие аксиом K1 — K2). *Если $Df = Dg$, $If = Ig$ и $f \subset g$, то $f = g$.*

Мономорфизм μ из F2 (определенный с точностью до эквивалентности) будем обозначать $\operatorname{im}\alpha$. Последовательность $\ldots \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} \ldots$ будем называть **точной в** A, если $\operatorname{im}\alpha = \ker\beta$, и **точной**, если она точна в каждой внутренней вершине. В $\mathscr{F}$ справедлива

Сильная 4-лемма. *Если в коммутативной диаграмме с точными строками*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\chi} & D \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow \\ A' & \xrightarrow[\varphi']{} & B' & \xrightarrow[\psi']{} & C' & \xrightarrow[\chi']{} & D' \end{array}$$

$\alpha \in$ Cok и $\delta \in$ M, то средний квадрат совершенно коммутативен, т. е. $(\psi'\beta = \gamma\psi$ и$)$ $\psi\beta^{\#} = \gamma^{\#}\psi'$.

Обратно, если он совершенно коммутативен, то $\varphi' \in M \Rightarrow \alpha \in$ Cok и $\chi \in$ Cok $\Rightarrow \delta \in$ M.

В частности,

F4 (= A7 в [2]). *В коммутативной диаграмме в $\mathscr{F}$ с точными строками*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & 0 \\ & & \| & & \iota\downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & 0 \end{array}$$

ι — изоморфизм.

В $\mathscr{F}$ справедлива (3×3)-лемма.

Теорема 1. *В каждой категории $\mathscr{C}$, удовлетворяющей аксиомам C0 — C3, выполняется аксиома*

K2б: $Df \subset Dg \Rightarrow f \subset fg^{\#}g$.

В частности $f \subset ff^{\#}f$ и, значит, $ff^{\#}\Omega = f\Omega$ для всех f из $\mathscr{C}$.

C4 (=«K4» из [2]). *В $\mathscr{C}(X, Y)$ при любых X и Y каждая пара соответствий (f, g) обладает нижней гранью $f \cap g$.*

C5 (следствие аксиом K5a и K2б), $g_1 f \cap g_2 f \subset (g_1 ff^{\#} \cap g_2) f$ *для любых $X, Y, Z, f \in \mathscr{C}(X, Y)$ и $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(Y, Z)$.*

C6 (=«K6» из [2]). *Для каждой пары объектов (A_1, A_2) существуют объект P и морфизмы π_i: $P \to A_i$, $i = 1, 2$, из $\mathscr{F}$ такие, что $\pi_2\pi_1^{\#} = \Omega\Omega^{\#}$ и $K\pi_1 \cap K\pi_2 = \omega$.*

P есть произведение $A_1 \times A_2$ в $\mathscr{F}$ с проекциями π_1, π_2 [3]. Зафиксируем по тройке (P, π_1, π_2) для каждой пары (A_1, A_2).

Теорема 2. *Каждое соответствие $f \in \mathscr{C}(A_1, A_2)$ однозначно представимо в виде $f = \pi_2\mu\mu^{\#}\pi_1^{\#}$, где $\mu = \mu_f \in S(P)$. При этом $f \mapsto \mu_f$ есть изоморфизм упорядоченных по возрастанию множеств $\mathscr{C}(A_1, A_2)$ и $S(P)$.*

Для каждой пары морфизмов (α_1: $X \to A_1$, α_2: $X \to A_2$) положим $\alpha_2\alpha_1^{\#} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot f = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ тогда и только тогда, когда $\mu_f = \operatorname{im}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ — морфизм X в P, определяемый морфизмами α_1 и α_2).

F5 (= A4*a в [3]). *Для каждой пары морфизмов* (α: $A \to C$, β: $B \to C$) *в $\mathscr{F}$ существует декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & C \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ D & \xrightarrow[\gamma]{} & B \end{array} \qquad (*)$$

F6 (=A4*b в [3]). *Если в декартовом квадрате* (*) α — *коядро, то и* γ — *коядро.*

$\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{\alpha_2'}{\alpha_1'}$ $\left(\text{соответственно } \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \subset \dfrac{\alpha_2'}{\alpha_1'}\right)$ тогда и только тогда, когда существуют коядро ν и коядро (морфизм) ν' такие, что $\alpha_i\nu = \alpha_i'\nu'$, $i = 1, 2$.

Каждый декартов квадрат совершенно коммутативен. В силу этого $\dfrac{\beta_2}{\beta} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2\gamma}{\alpha_1\delta}$, где γ и δ — морфизмы из декартова квадрата (*).

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ — категории с нулевыми объектами и образами. Функтор t: $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ будем называть **точным**, если он переводит каждую точную диаграмму

$$\xrightarrow{\alpha} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow[\gamma]{} \end{array}, \qquad (**)$$

т. е. диаграмму (**), в которой $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{eq}(\beta, \gamma)$, в точную и нулевой объект — в нулевой.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}' \in$ С. Каждый I-функтор T: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ индуцирует точный функтор t: $\mathbf{F}(\mathscr{C}) \to \mathbf{F}(\mathscr{C}')$ и каждый точный функтор t: $\mathbf{F}(\mathscr{C}) \to \mathbf{F}(\mathscr{C}')$ единственным образом продолжается до I-функтора T: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$.*

Следствие. *Если $\mathbf{F}(\mathscr{C})$ и $\mathbf{F}(\mathscr{C}')$ изоморфны, то $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ I-изоморфны.*

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{C} \in$ С. Тогда $ff^{\#}\omega = f\omega$ для всех соответствий f из $\mathscr{C}$.*

Следствие. *$ff^{\#}f = f$ для всех соответствий f из $\mathscr{C} \in$ С.*

Таким образом, хотя неизвестно, выполняется ли аксиома K2a, те следствия аксиом K1 — K2, на которые опираются гомологические построения в [1], § 3, выполнены, так что все сказанное там справедливо и для категорий соответствий класса С. В $\mathscr{F} = \mathbf{F}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C} \in$ С, справедлива также лемма о связывающем гомоморфизме из [4], п. 15.

II. Класс F образуют все категории $\mathscr{F}$, обладающие свойствами F0 — F6 или, что то же, удовлетворяющие аксиомам A1 — A3, A4*, A5 и A7 М. С. Бургина. Его γ-категории с конечными произведениями — это категории, удовлетворяющие еще аксиоме A6, требующей, чтобы каждая композиция $\nu\varkappa$ коядра ν на ядро $\varkappa$ была представима в виде композиции ядра на коядро. Но среди полуабелевых категорий этому требованию удовлетворяют только абелевы; ему не удовлетворяет также категория топологических групп.

Пусть теперь F′ — класс всех бикатегорий ($\mathscr{F}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{M}$), где $\mathscr{F}$ — категория, удовлетворяющая аксиомам F0 — F2 и F4 — F5, а классы проекций и инъекций $\mathscr{E}$ и $\mathscr{M}$ таковы, что выполнены также аксиомы

F3′. $\mathscr{F}$ — *локально* $\mathscr{M}$-*малая категория, т. е. для каждого объекта* X *класс* $S_{\mathscr{M}}(X)$ *всех его подобъектов, принадлежащих* $\mathscr{M}$, *есть множество.*

F6′. *Если в декартовом квадрате* (*) $\alpha \in \mathscr{E}$, *то и* $\gamma \in \mathscr{E}$.

Для каждого морфизма φ: $A \to B$ существует однозначно определенное $\mu \in \mathscr{M} \cap S_{\mathscr{M}}(B)$ такое, что $\varphi = \mu\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathscr{E}$; будем обозначать его $\mathrm{Im}_{\mathscr{M}}\varphi$. Очевидно $\mathscr{F} \mapsto (\mathscr{F}, \mathrm{Cok}, \mathrm{M})$ есть вложение F в F′, причем, обратно, $(\mathscr{F}, \mathrm{Cok}, \mathrm{M}) \in \mathrm{F}' \Rightarrow \mathscr{F} \in \mathrm{F}$. Но категория $\mathscr{F} \in \mathrm{F}$ может обладать и другими бикатегорными структурами $(\mathscr{E}, \mathscr{M})$, удовлетворяющими аксиомам F3′ и F6′.

Для каждой бикатегории $(\mathscr{F}, \mathscr{E}, \mathscr{M}) \in \mathrm{F}'$ построим категорию соответствий $\mathscr{C}$; будем обозначать ее $\mathbf{C}(\mathscr{F}, \mathscr{E}, \mathscr{M})$, или $\mathbf{C}(\mathscr{F})$, если $(\mathscr{E}, \mathscr{M}) = (\mathrm{Cok}, \mathrm{M})$. За $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ примем $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$. Для каждой пары объектов (A_1, A_2) зафиксируем их произведение (P, π_1, π_2) (существующее в силу F0 и F5) и за $\mathscr{C}(A_1, A_2)$ (опираясь на F3′) примем $S_{\mathscr{M}}(P)$, с имеющимся там отношением порядка. Композицию морфизмов $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ и $g \in \mathscr{C}(Y, Z)$ определим формулой

$$gf = \mathrm{Im}_{\mathscr{M}}(\pi((f \times 1_Z) \cap (1_X \times g))),$$

где π — каноническая проекция $X \times Y \times Z$ на $X \times Z$ (ср. [1]). Под $f^{\#}$, где $f \in \mathscr{C}(A_1, A_2)$, будем понимать $\mathrm{Im}_{\mathscr{M}}(if)$, где i: $A_1 \times A_2 \to A_2 \times A_1$ — канонический изоморфизм. Для каждого морфизма α из $\mathscr{F}$ положим $\tilde{I}(\alpha) = \mathrm{Im}_{\mathscr{M}}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$.

Теорема 5. $\mathscr{C} = \mathbf{C}(\mathscr{F}, \mathscr{E}, \mathscr{M})$ *есть категория соответствий класса* C, *а* $\tilde{I}$ *индуцирует точный унивалентный функтор* I: $\mathscr{F} \to \mathbf{F}(\mathscr{C})$, *биективный на объектах и такой, что* $I(\varphi)$ — *изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathscr{E} \cap \mathbf{M}$, *и каждый морфизм в* $\mathbf{F}(\mathscr{C})$ *представим в виде* $I(\alpha)I(\varepsilon)^{-1}$, *где* $\varepsilon \in \mathscr{E} \cap \mathrm{M}$.

Замечание. Категорию $\mathbf{F}(\mathscr{C})$ можно получить и без посредства $\mathscr{C}$ как «допускающую исчисление правых дробей» категорию $\mathscr{F}[(\mathscr{E} \cap \mathrm{M})^{-1}]$ [7].

Следствие 1. *Какова бы ни была категория* $\mathscr{K}$, *для каждого функтора* J: $\mathscr{F} \to \mathscr{K}$, *переводящего все* $\varepsilon \in \mathscr{E} \cap \mathrm{M}$ *в изоморфизмы, существует единственный функтор* $\bar{J}$: $\mathbf{F}(\mathscr{C}) \to \mathscr{K}$ *такой, что* $J = \bar{J} \circ I$ (ср. [8]).

Следствие 2. *Если* $\mathscr{F} \in \mathrm{F}$ *и* $(\mathscr{E}, \mathscr{M}) = (\mathrm{Cok}, \mathrm{M})$, *то* I — *функторный изоморфизм. Таким образом, каждая категория* $\mathscr{F} \in \mathrm{F}$ *изоморфна подкатегории* $\mathbf{F}(\mathscr{C})$ *функциональных соответствий категории соответствий* $\mathscr{C} = \mathbf{C}(\mathscr{F}) \in \mathrm{C}$.

В итоге, связь между классами F и C можно описать так: если рассматривать их как классы объектов «категорий» с всевозможными изоморфизмами (соответственно I-изоморфизмами) в качестве морфизмов, то $\mathbf{F}$ и $\mathbf{C}$ распространяются до функторов $\mathbf{F}$: $\mathrm{C} \to \mathrm{F}$ и $\mathbf{C}$: $\mathrm{F} \to \mathrm{C}$, осуществляющих эквивалентность этих категорий посредством функторных изоморфизмов Φ: $1_{\mathrm{C}} \to \mathbf{CF}$ и Ψ: $1_{\mathrm{F}} \to \mathbf{FC}$, определяемых формулами $\Phi_{\mathscr{C}}(f) = \mu_f$ (см. теорему 2) и $\Psi_{\mathscr{F}}(\alpha) = \mathrm{Im}_{\mathrm{M}}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$ (см. следствие 2 теоремы 5).

Московский
государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
8 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Пуппе, Сборн. пер. Математика, 8, 6, 109 (1964). [2] М. С. Бургин, УМН, 24, 2, 221 (1969). [3] М. С. Бургин, Тр. Московск. Матем. общ., 22, 161 (1970). [4] Д. А. Райков, ДАН, 188, № 5, 1006 (1969). [5] H.-B. Brinkmann, D. Puppe, Abelsche u. exakte Kategorien, Korrespondenzen, Berlin, 1969. [6] А. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961. [7] П. Габриэль, М. Цисман, Категории частных и теория гомотопий, М., 1971. [8] C. Bănică, N. Popescu, Rev. Roum. Math. pures et appl., 10, 621 (1965).