Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 513.85

МАТЕМАТИКА

Б. Ф. СКУБЕНКО

К ГИПОТЕЗЕ МИНКОВСКОГО ДЛЯ $n = 5$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 II 1972)

1°. Известная гипотеза Минковского состоит в том, что для любых вещественных $l_1, \ldots, l_n$ и любой вещественной матрицы A с $\det A \neq 0$ найдется такой целочисленный вектор X_0, что для вектора $(y_1, \ldots, y_n) = X_0 A + (l_1, \ldots, l_n)$ будет выполнено

$$|y_1 \ldots y_n| \leqslant 2^{-n} |\det A|. \qquad (*)$$

Этот факт был доказан ([1, 2]) для $n = 3$ и $n = 4$.

Наша цель — изложить метод, позволяющий дать доказательство для $n \leqslant 5$. Нами будет использована «теорема переноса» для шара, доказательство которой можно найти в ([3]). Сформулируем эту теорему.

Если унимодулярная решетка Λ размерности n такова, что для нее существует шар размерности n с центром в начале и этот шар не содержит внутри себя точки решетки Δ (кроме начала), а на границе его лежат n линейно независимых точек решетки Λ, то для $n \leqslant 5$ шар радиуса $\sqrt{n}/2$ содержит фундаментальную область решетки Λ.

В дальнейшем такую решетку будем называть р е г у л я р н о й.

Решетку Λ, у которой нет базиса вида $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (с точностью до перестановки столбцов), будем называть н е в ы р о ж д е н н о й.

Нами доказана следующая

О с н о в н а я т е о р е м а. *Если решетка Λ размерности $n \leqslant 5$ невырождена, то решетка $\Lambda \cdot K$ будет регулярной, где K — некоторый автоморфизм звезды S: $|x_1 \ldots x_n| \leqslant 1$.*

Ясно, что из утверждений теоремы переноса и основной теоремы следует $(*)$.

2°. «П а р у с». В пространстве R^n введем отображение f, переводящее точку $Z = (x_1, \ldots, x_n)$ в точку $Z^f = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$.

Пусть Λ — невырожденная решетка, а $\Lambda^{(0)}$ — множество, полученное из Λ путем отбрасывания 0.

Обозначим через M множество, полученное при помощи отображения f множества $\Lambda^{(0)}$, через $\overline{\mathrm{M}}$ — замкнутую выпуклую оболочку множества M.

П а р у с о м П назовем часть границы $\overline{\mathrm{M}}$, заключенную в открытом координатном угле. Перечислим основные свойства паруса.

I. Парус П состоит из $(n-1)$-мерных граней Δ, соприкасающихся по $(n-2)$-мерным граням. Грани являются выпуклыми конечными многогранниками. Некоторые их грани меньших размерностей, в частности, вершины, могут лежать на координатных плоскостях. Мы их также будем считать принадлежащими парусу. Множество граней паруса обозначим через $f(M)$.

II. Любой элемент Δ множества $f(\mathrm{M})$ лежит в некоторой плоскости $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 1$, причем $a_1, \ldots, a_n > 0$ и $a_1, \ldots, a_n > c$, где c — постоянная, отличная от нуля и зависящая только от $\det \Lambda$.

III. Если $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — полный набор точек из $\Delta \cap \mathrm{M}$, то m конечно и среди $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ есть n линейно независимых.

IV. Пусть Δ^r — какая-либо грань элемента $\Delta \in f(M)$ размерности r; $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ — полный набор точек множества $\Delta^r \cap M$, $r = 0, \ldots, n-1$; тогда среди $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ есть $r+1$ линейно независимых точек.

V. Если у элемента $\Delta_1 \in f(M)$ грань Δ_1^{n-2} не лежит на координатной плоскости, то существует элемент $\Delta_2 \in f(M)$ такой, что $\Delta_1^{n-2} = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

VI. Пусть $1 \leqslant s \leqslant n$, *где* s — некоторое натуральное число, а ε — сколь угодно малое положительное число. Существует $\Delta \in f(M)$, лежащий в плоскости $a_1x_1 + \ldots + a_sx_s + \ldots + a_nx_n = 1$, причем $a_s < \varepsilon$.

VII. Пусть $1 \leqslant s < t \leqslant n$, где s, t — натуральные числа, а ε — сколь угодно малое положительное число. Существует $\Delta \in f(M)$, лежащий в плоскости $a_1x_1 + \ldots + a_sx_s + \ldots + a_tx_t + \ldots + a_nx_n = 1$, причем $a_sa_t < \varepsilon$.

VIII. Пусть $\Delta \in f(M)$, а $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ — плоскость, в которой лежит элемент Δ. Тогда в пространстве R^n эллипсоид $a_1y_1^2 + \ldots + a_ny_n^2 \leqslant \leqslant 1$ для решетки Λ будет пустой, а на границе этого эллипсоида будут лежать точки $\pm Z_1, \ldots, \pm Z_m$, которые являются прообразами точек $\Omega_1, \ldots, \Omega_r \in \Delta \cap M$.

В дальнейшем символом $\Delta^r(\Omega)$ будем обозначать множество $\Delta^r \cap M$, а символом $\Delta^r(Z)$ — полный набор прообразов множества $\Delta^r(\Omega)$, где $\Delta^r \in \Delta \in f(M)$.

Будем говорить, что $\Delta_1^{r_1}$ эквивалентно $\Delta_2^{r_2}$ (r_1 не обязательно равно r_2), если подпространство, натянутое на $\Delta_1^{r_1}(Z)$, совпадает с подпространством, натянутым на $\Delta_2^{r_2}(Z)$. Размерность подпространства, натянутого на $\Delta^r(Z)$ будем называть **порядком** элемента Δ^r и писать $\operatorname{ord}\Delta^r$.

Элемент Δ^r будем называть **регулярным**, если $\operatorname{ord}\Delta^r \geqslant r+1$.

Множество элементов одинаковой размерности r будем называть **цепью** и обозначать символом C^r, если это множество связно по граням размерности $r-1$. Цепь C^r будем называть регулярной, если для любых Δ_1^r, $\Delta_2^r \in C^r$ существует подцепь $C_1^r \subset C^r$ со свойствами· 1) $\Delta_1^r, \Delta_2^r \in C_1^r$; 2) для любых $\Delta_3^r, \Delta_4^r \in C_1^r$, если $\dim \Delta_3^r \cap \Delta_4^r = r-1$, то $\operatorname{ord} \Delta_3^r \cap \Delta_4^r \leqslant r$.

В связи с свойством VIII, для того чтобы доказать основную теорему, необходимо показать, что множество $f(M)$ содержит регулярный элемент.

Легко показывается, что если C^r — регулярная цепь, в которой содержится два неэквивалентных элемента, то C^r содержит элемент, порядок которого не меньше $r+1$.

3^0. **Доказательство** основной теоремы для $n = 3$, 4. Так как одномерные грани всегда регулярны, то множество $f(M)$ при $n = 3$ есть регулярная цепь. Множество $f(M)$ содержит неэквивалентные элементы, а поэтому это множество содержит регулярный элемент.

Для доказательства основной теоремы для $n = 4$ доказывается, что если C^2 — регулярная цепь, элементы которой не имеют свободных одномерных граней, то C^2 содержит элемент порядка 3. В связи с этим множество $f(M)$ при $n = 4$ есть регулярная цепь, а из свойства VI следует, что $f(M)$ содержит неэквивалентные элементы, а поэтому $f(M)$ содержит регулярный элемент.

4^0. **Случай** $n = 5$. При помощи метрических соображений и используя свойство VI, доказывается, что любая регулярная четырехмерная цепь, состоящая из эквивалентных элементов, конечна; и любая четырехмерная цепь, состоящая из эквивалентных элементов порядка 3, конечна.

Далее показывается, что если C^4 — регулярная цепь, то любой полный связный кусок ее границы BC^4 есть регулярная цепь.

Предполагая, что $f(M)$ не содержит регулярного элемента, при помощи свойства VII мы придем к противоречию.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
1 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Remak, Math. Zs., 17, 1 (1923); 18, 173 (1924). [2] F. J. Dyson, Ann. Math., (2), 49, 82 (1948). [3] A. C. Woods, Mathematika, 12, 143 (1965).