Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.948.32 : 517.544 *МАТЕМАТИКА*

А. В. АЙЗЕНШТАТ

О ЗАДАЧАХ РИМАНА И ГАЗЕМАНА НА СЧЕТНОМ МНОЖЕСТВЕ КОНТУРОВ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 5 XI 1973)

1. Рассмотрим задачу Римана *

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \quad t\in L, \tag{1}$$

для контура L, состоящего из счетного множества простых гладких замкнутых кривых L_k, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$z=0\in D_1^+; \quad L_k\subset D_{k+1}^+, \quad k=1,2,\ldots; \quad \lim_{k\to\infty} r_k=\infty;$$

$$l_k=O(r_k), \quad k\to\infty; \quad \inf_k \rho_k>0; \quad \sup_k \sup_{t_1,t_2\in L_k} \frac{s(t_1,t_2)}{|t_1-t_2|}<+\infty \tag{2}$$

($r_k=\inf\limits_{t\in L_k}|t|$, $l_k=\int\limits_{L_k}|dt|$, D_k^+ — внутренность кривой L_k, ** ρ_k — расстояние от L_k до $L-L_k$, $s(t_1, t_2)$ — длина меньшей из дуг $t_1t_2\subset L_k$). Искомая кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет еще условию на бесконечности: для любого достаточно малого $\delta>0$

$$\lim \Phi(z)=0 \tag{3}$$

при $z\to\infty$ на множестве $D_\delta=\{z|\rho(z, L)>\delta\}$.

Пусть функции $G(t)\neq 0$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на каждой кривой L_k. Введем следующие обозначения:

$$\varkappa(z)=\begin{cases} 0, & z\in D_1^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{k}\varkappa_j, & z\in D_k^-\cap D_{k+1}^+, \quad k=1,2,\ldots; \end{cases}$$

$$G_0(t)=G(t)t^{-\varkappa_k}, \quad t\in L_k, \quad \varkappa_k=\mathrm{Ind}_{L_k}G(t);$$

$$X(z)=z^{-\varkappa(z)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\}; \quad \varkappa=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\varkappa_j.$$

Предположим, что $G_0(t)\in \bar{H}_\lambda(L)$ ***, $0<\lambda\leq 1$, и

---

* О задаче Римана как на конечном, так и на счетном множестве контуров см. ([1-10]).

** Все кривые L_k ориентированы так, что внутренние области остаются слева.

*** $\varphi(t)\in\bar{H}_\lambda(L)$, если $\sup\limits_k \sup\limits_{t_1,t_2\in L_k} \dfrac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\lambda}<+\infty$.

$$\lim [G_0(t)-1]t^\alpha=0, \quad \alpha>2.$$

Рассмотрим сначала однородную задачу Римана $(g(t)\equiv 0)$.

Лемма 1. *Функция* $\Phi(z)$ *тогда и только тогда удовлетворяет однородному условию* (1), *когда функция* $\Phi(z)/X(z)$ *целая.*

Для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости факторизации

$$G(t)=X^+(t)/X^-(t), \quad t\in L.$$

В соответствии с леммой интерес представляет множество $\mathfrak{M}$ целых функций, порождающих решения однородной задачи Римана, т. е. таких целых функций $\Psi(z)$, для которых функции $\Phi(z)=X(z)\Psi(z)$ удовлетворяют условию (3).

Теорема 1. *При* $\varkappa\leqslant 0$ *множество* $\mathfrak{M}$ *не содержит функций, отличных от нуля. Если* $0<\varkappa<+\infty$, *то* $\mathfrak{M}$ *есть множество многочленов степени не выше, чем* $\varkappa-1$. *При* $\varkappa=+\infty$ *в* $\mathfrak{M}$ *входят все многочлены.*

Доказательство теоремы производится с помощью непосредственной оценки на бесконечности функции

$$\Psi(z)=\Phi(z)/X(z)\in\mathfrak{M}.$$

Следствие. *Максимальное число л.н.з. решений однородной задачи* (1) $l=\max\{0, \varkappa\}$.

Теорема 1 не дает полного описания множества $\mathfrak{M}$ в случае $\varkappa=+\infty$. Для более подробного рассмотрения этого случая введем обозначения *:

$$\varphi(x)=\varkappa(e^x)x, \quad x>0; \quad a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\varphi(x)}{x}; \quad b=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\overset{\approx}{\varphi}(x)}{x};$$

$\mathfrak{M}_r$ — множество целых функций порядка $\rho<r$; $\mathfrak{N}_r$ — множество целых функций порядка $\rho>r$.

Теорема 2. $\mathfrak{M}_a\subset\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_b\cap\mathfrak{M}=\emptyset$ *и для любого* $c\in(a, b)$ $\mathfrak{M}_c\not\subset\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_c\cap\mathfrak{M}\neq\emptyset$.

При доказательстве теоремы 2 использовались следующие утверждения.

Лемма 2. *Если нижний порядок целой функции* $\Psi(z)$ $\rho'>a$, *то*

$$\Psi(z)\notin\mathfrak{M}.$$

Лемма 3. *Если* $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|\,\widetilde{e}^{\varphi_\varepsilon(n)}<+\infty$, *где*

$$\varphi_\varepsilon(x)=[\varkappa(e^x/B)-b-\varepsilon]\ln(e^x/B^2), \qquad \varepsilon>0,$$

$$B=\sup_k(R_k/r_k); \quad R_k=\sup_{t\in L_k}|t|,$$

то

$$\Psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathfrak{M}.$$

Рассмотрим неоднородную задачу Римана (1), предполагая, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)t^\beta}{X^+(t)\Psi_g(t)}=0, \quad \beta>3,$$

где $\Psi_g(z)\in\mathfrak{M}$ при $\varkappa>0$ и $\Psi_g(z)=z^\varkappa$ при $-\infty<\varkappa\leqslant 0$.

Теорема 3. *При* $0\leqslant\varkappa\leqslant+\infty$ *неоднородная задача* (1) *безусловно разрешима и ее общее решение находится по формуле*

$$\Phi(z)=X(z)\left[\Psi(z)+\frac{\Psi_g(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)\Psi_g(\tau)(\tau-z)}\right], \quad \Psi(z)\in\mathfrak{M}. \qquad (4)$$

---

* $\widetilde{\varphi}(x)$ — функция, двойственная по Юнгу к $\varphi(x)$ (см. ([11]), стр. 86).

Если $-\infty<\varkappa<0$, то задача (1) *имеет* (*единственное*) *решение* (4) *тогда и только тогда, когда выполнены* $-\varkappa$ *условий разрешимости*

$$\int_L \frac{g(\tau)\tau^{l-1}}{X^+(\tau)}d\tau=0, \quad l=1,\ldots,-\varkappa.$$

Рассмотрим задачу Газемана

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \quad t\in L, \tag{5}$$

в случае, когда контур L состоит из счетного множества окружностей $L_k=\{|t|=r_k\}$, $k=1, 2, \ldots, \inf\limits_k(r_{k+1}-r_k)>0$. Краевое условие (5) в этом случае можно записать в виде

$$\Phi^+[r_ke^{i\theta_{k-1}(\gamma)}]=G[r_ke^{i\theta_k(\gamma)}]\Phi^-[r_ke^{i\theta_k(\gamma)}]+g[r_ke^{i\theta_k(\gamma)}], \tag{6}$$
$$t=r_ke^{i\gamma}\in L_k, \quad k=1, 2,\ldots,$$

где $e^{i\theta_0(\gamma)}\equiv e^{i\gamma}$, $e^{i\theta_1(\gamma)},\ldots$ — счетное множество сохраняющих ориентацию дифференцируемых гомеоморфизмов единичной окружности на себя.

Задача Газемана (6) сводится к задаче Римана (1) с помощью склеивающей функции $\omega(z)$, определяемой по условию

$$\omega^+[r_ke^{i\theta_{k-1}(\gamma)}]=\omega^-[r_ke^{i\theta_k(\gamma)}], \quad t=r_ke^{i\gamma}\in L_k, \quad k=1, 2,\ldots$$

Теорема 4. *Если*

$$\sup\sup\max\{\theta_k'(\gamma), 1/\theta_k'(\gamma)\}<+\infty, \tag{7}$$

то склеивающая функция существует.

При условии (7) *склеивающая функция имеет вид*

$$\omega(z)=\begin{cases} w(z), & z\in D_1^+,\\ w[\alpha_k^{-1}(z)], & z\in D_k^-\cap D_{k+1}^+,\end{cases}$$

где $\alpha_k(re^{i\gamma})=re^{i\theta_k(\gamma)}$, *а* $w(z)$ *есть гомеоморфизм всей плоскости на себя, удовлетворяющий уравнению Бельтрами*

$$dw/d\bar z=\mu(z)\,dw/dz,$$

$$\mu(z)=\begin{cases} 0, & z\in D_1^+,\\ e^{2i\gamma}\dfrac{1-\theta_k'(\gamma)}{1+\theta_k'(\gamma)}, & z=re^{i\gamma}\in D_k^-\cap D_{k+1}^+.\end{cases}$$

Контур $\tilde L$, получаемый после склеивания, вообще говоря не удовлетворяет условиям (2), необходимым для применения к задаче Газемана теорем 1—3. В связи с этим наложим на $\alpha(t)$ более жесткие ограничения, чем условия (7).

Теорема 5. *Если*

$$\sup_k\sup_\gamma|1-\theta_k'(\gamma)|r_{k+1}^\alpha<+\infty,$$
$$\sup_k\sup_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{|\theta_k'(\gamma_2)-\theta_k'(\gamma_1)|}{|\gamma_2-\gamma_1|^\alpha}r_{k+1}^\alpha<+\infty, \quad \alpha>0, \tag{8}$$

то контур $\tilde L$ *удовлетворяет условиям* (2).

Доказательство теоремы основано на рассмотрении уравнения ([12], стр. 97)

$$\varphi(\xi)+\frac{\nu(\xi)}{\pi}\iint\limits_{|z|<1/r_1}\frac{\varphi(z)}{(z-\xi)^2}\,dx\,dy=\nu(\xi),\quad \nu(\xi)=\mu\left(\frac{1}{\xi}\right)\frac{\xi^2}{\bar{\xi}^2},$$

в пространстве C_σ^*, $0<\sigma<1$, с нормой

$$\|\varphi\|=\sup_{|\xi|<1/r_1}|\varphi(\xi)|+\sup_k\sup_{\substack{r_{k+1}^{-1}<|\xi_i|<r_k^{-1}\\ i=1,2}}\frac{|\varphi(\xi_2)-\varphi(\xi_1)|}{|\xi_2-\xi_1|^\sigma}.$$

Таким образом, при выполнении условий (8) для задачи Газемана (6) справедливы аналоги теоремы 1—3.

Автор выражает благодарность Г. С. Литвинчуку за руководство работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
4 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [2] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М., 1963. [3] *Н. И. Ахиезер*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 4, 275 (1945). [4] *И. Н. Карцивадзе, Б. В. Хведелидзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 10, № 10, 587 (1949). [5] *И. Н. Карцивадзе, Б. В. Хведелидзе*, Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 20, 211 (1954). [6] *С. А. Фрейдкин*, Уч. зап. Кишиневск. унив., т. 82, 12 (1965). [7] *В. А. Пааташвили*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 37, № 1, 31 (1965). [8] *В. А. Пааташвили*, Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 34, 103 (1968). [9] *М. Э. Толочко*, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем., № 2, 70 (1970). [10] *Л. И. Чибрикова, П. Х. Мкоян*, Изв. высш. учебн. завед., сер. матем., № 3, 90 (1972). [11] *М. А. Евграфов*, Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962. [12] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1959.