Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 531.391 *МЕХАНИКА*

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, В. С. ЛОЩИНИН

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА

Для машинных агрегатов, для которых экспериментально или теоретическим путем удается получить тахограмму $\omega=\omega(\varphi)$ или найти соответствующий энергетический режим $T=T(\varphi)$, отыскание динамического коэффициента неравномерности движения в форме $\delta=\delta[\omega(\varphi)]$ или $\delta[T(\varphi)]$ может быть выполнено с помощью методики, изложенной в работе [1].

Наибольший практический и теоретический интерес представляет его вычисление для машинных агрегатов, находящихся в стадии динамического синтеза, проектирования и конструирования для случаев, когда закон движения звена приведения является заведомо неизвестным. Этому вопросу и посвящена данная статья. В ней построен алгоритм, позволяющий находить динамический коэффициент неравномерности движения с любой степенью точности.

1. При решении широкого класса задач динамического синтеза характеристики и массы звеньев двигателя и рабочей машины предполагаются известными. Исходя из возможности их приведения, например, к главному валу двигателя, во всех последующих рассуждениях суммарная приведенная характеристика $M(\varphi, T)$ и приведенный момент $I(\varphi)$ масс всех звеньев считаются известными и удовлетворяют обычным условиям [2], в которых работают машинные агрегаты с четко выраженными стадиями установившегося движения.

Уравнение движения машинного агрегата при этом может быть записано в форме

$$dT/d\varphi=M(\varphi, T), \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия агрегата, соответствующая положению φ главного вала.

При исследовании динамической неравномерности движения машинного агрегата основное значение имеет коэффициент $\delta[T_\xi(\varphi)]$, соответствующий периодическому режиму $T=T_\xi(\varphi)$. Если $\chi[T_\xi(\varphi)]$ — характеристический критерий [3] этого режима, то, как известно,

$$\delta[T_\xi(\varphi)]=\delta[T_\xi(\varphi_0)]+\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\chi[T_\xi(z)]dz. \tag{2}$$

Важнейшие параметры, описывающие кинематику и динамику машинного агрегата, тесно связаны с коэффициентом $\delta[T_\xi(\varphi)]$. Отметим в частности, что угловая скорость $\omega_\xi(\varphi)$ и угловое ускорение $\varepsilon_\xi(\varphi)$ главного вала машинного агрегата однозначно выражаются через динамический коэффициент $\delta[T_\xi(\varphi)]$ и фазовую скорость его изменения:

$$\omega_\xi(\varphi)=\omega_\xi(\varphi_0)\exp\delta[T_\xi(\varphi)],$$

$$\varepsilon_\xi(\varphi)=\omega_\xi^2(\varphi_0)\frac{d\delta[T_\xi(\varphi)]}{d\varphi}\exp 2\delta[T_\xi(\varphi)].$$

2. Непосредственное отыскание коэффициента $\delta[T_\xi(\varphi)]$ затруднено тем, что в общем нелинейном случае периодический предельный режим $T=T_\xi(\varphi)$, как и начальные условия, которыми он определяется, оказываются неизвестными. Известно, однако, что они содержатся в полосе

$$\tau_*\leqslant T\leqslant\tau^*,\quad \varphi\in E_1, \tag{3}$$

где $\tau_*=\inf\limits_{\varphi\in E_1}\tau(\varphi)$, $\tau^*=\sup\limits_{\varphi\in E_1}\tau(\varphi)$, $T=\tau(\varphi)$ — инерциальная кривая ([4]) движения машинного агрегата.

В рассматриваемых условиях верхняя и нижняя грани крутизны $M_T'(\varphi, T)$ приведенного момента всех действующих сил в полосе (3) отрицательны:

$$-\lambda_1=\sup M_T'(\varphi, T),\quad -\lambda_2=\inf M_T'(\varphi, T),\quad 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2.$$

Рассмотрим оператор

$$Au=\frac{\exp(-\lambda_2\varphi)}{\exp(\lambda_2\xi)-1}\int\limits_\varphi^{\varphi+\xi}\exp(\lambda_2 t)\{M(t,u)+\lambda_2 u\}dt, \tag{4}$$

определенный в пространстве всех ξ-периодических непрерывных функций $u=u(\varphi)$, $\varphi\in E_1$, удовлетворяющих неравенству

$$\tau_*\leqslant u(\varphi)\leqslant\tau^*,\quad \varphi\in E_1.$$

Исходя из произвольной функции $T_1(\varphi)$ этого пространства, с помощью оператора A построим функциональную последовательность $T_k(\varphi)$ по рекуррентному закону

$$T_{k+1}(\varphi)=\frac{\exp(-\lambda_2\varphi)}{\exp(\lambda_2\xi)-1}\int\limits_\varphi^{\varphi+\xi}\exp(\lambda_2 t)\{M[t,T_k(t)]+\lambda_2 T_k(t)\}dt,\quad k=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

Можно показать ([5]), что получаемые функции $T_k(\varphi)$, $k=1, 2, 3,\ldots$, содержатся в рассматриваемом функциональном пространстве и поэтому применение оператора A к ним имеет смысл. Последовательность $T_k(\varphi)$ равномерно сходится на всей числовой прямой к периодическому предельному режиму $T=T_\xi(\varphi)$ движения машинного агрегата:

$$T_k(\varphi)\rightrightarrows T_\xi(\varphi),\quad \varphi\in E_1 \tag{6}$$

при $k\to\infty$.

3. Если отсчет динамической неравномерности вести исходя из положения $\varphi=\varphi_0$ главного вала, то естественно считать, что $\delta[T_\xi(\varphi_0)]=0$. Так как ([3])

$$\chi[T_\xi(\varphi)]=\frac{M[\varphi,T_\xi(\varphi)]}{T_\xi(\varphi)}-\frac{\dot I(\varphi)}{I(\varphi)}, \tag{7}$$

то в силу уравнения движения (1) динамический коэффициент неравномерности движения (2) можно представить в форме

$$\delta[T_\xi(\varphi)]={}^1\!/_2\ln\frac{T_\xi(\varphi)}{I(\varphi)}-{}^1\!/_2\ln\frac{T_\xi(\varphi_0)}{I(\varphi_0)}. \tag{8}$$

По аналогии рассмотрим составленную с помощью (5) функциональную последовательность

$$\delta[T_k(\varphi)]={}^1\!/_2\ln\frac{T_k(\varphi)}{I(\varphi)}-{}^1\!/_2\ln\frac{T_k(\varphi_0)}{I(\varphi_0)},\quad k=1,2,\ldots \tag{9}$$

Отметим прежде всего, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется номер $K=K[1-\exp(-2\varepsilon)]$ такой, что при всех $k>K$ будет выполняться неравенство

$$|\delta[T_k(\varphi)]-\delta[T_\xi(\varphi)]|={}^1\!/_2\left|\ln\frac{T_k(\varphi)T_\xi(\varphi_0)}{T_\xi(\varphi)T_k(\varphi_0)}\right|<\varepsilon \tag{10}$$

в промежутке $\varphi_0\leqslant\varphi<+\infty$.

Нетрудно убедиться в том, что оно равносильно неравенству

$$-\varepsilon_1 < \frac{T_k(\varphi)\, T_\xi(\varphi_0)}{T_\xi(\varphi)\, T_k(\varphi_0)} - 1 < \varepsilon_1 \exp(2\varepsilon), \tag{11}$$

где $\varepsilon_1 = 1 - \exp(-2\varepsilon)$, и будет заведомо выполняться для всех тех k, для которых

$$\left| \frac{T_k(\varphi)\, T_\xi(\varphi_0)}{T_\xi(\varphi)\, T_k(\varphi_0)} - 1 \right| < \varepsilon_1, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi < +\infty. \tag{12}$$

Учитывая, что [4]

$$\tau_* \leqslant T_\xi(\varphi) \leqslant \tau^*, \quad \tau_* \leqslant T_k(\varphi) \leqslant \tau^*, \tag{13}$$

получим

$$\left| \frac{T_k(\varphi)\, T_\xi(\varphi_0)}{T_\xi(\varphi)\, T_k(\varphi_0)} - 1 \right| \leqslant \frac{\tau^*}{\tau_*^2} \{ |T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)| + |T_k(\varphi_0) - T_\xi(\varphi_0)| \}. \tag{14}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $T_k(\varphi)$ к режиму $T_\xi(\varphi)$ по числу $\tau_*^2 \varepsilon_1 / (2\tau^*)$, найдется номер $K = K(\varepsilon_1) = K[1 - \exp(-2\varepsilon)]$ такой, что при всех $k > K$ будет выполняться неравенство

$$|T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)| < \tau_*^2 \varepsilon_1 / 2\tau^*, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi < +\infty. \tag{15}$$

Сопоставление (14) и (15) показывает, что при $k > K$ неравенство (12), а следовательно, и неравенство (10) будут выполняться в промежутке $\varphi_0 \leqslant \varphi < +\infty$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Функциональная последовательность* $\delta[T_k(\varphi)]$, $k = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходится в промежутке* $\varphi_0 \leqslant \varphi < +\infty$ *к динамическому коэффициенту* $\delta[T_\xi(\varphi)]$ *неравномерности движения машинного агрегата в периодическом режиме* $T = T_\xi(\varphi)$:

$$\delta[T_k(\varphi)] \rightrightarrows \delta[T_\xi(\varphi)], \quad \varphi_0 \leqslant \varphi < +\infty \tag{16}$$

при $k \to +\infty$.

4. Для оценки погрешностей γ_k, с которыми получаемые приближения $\delta[T_k(\varphi)]$ воспроизводят динамический коэффициент $\delta[T_\xi(\varphi)]$ неравномерности движения, представим γ_k в виде

$$\gamma_k = \sup_{\varphi \geqslant \varphi_0} |\delta[T_k(\varphi)] - \delta[T_\xi(\varphi)]| =$$
$$= {}^1/_2 \sup_{\varphi \geqslant \varphi_0} \left| \ln \left\{ \left[\frac{T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)}{T_\xi(\varphi)} + 1 \right] \left[\frac{T_\xi(\varphi_0) - T_k(\varphi_0)}{T_k(\varphi_0)} + 1 \right] \right\} \right|. \tag{17}$$

Отсюда с учетом неравенств (13) получим

$$\gamma_k \leqslant {}^1/_2 \ln \left\{ \left[\frac{\sup\limits_{\varphi \geqslant \varphi_0} |T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)|}{\tau_*} + 1 \right] \left[\frac{|T_k(\varphi_0) - T_\xi(\varphi_0)|}{\tau_*} + 1 \right] \right\}. \tag{18}$$

В силу теоремы работы [6]

$$\sup_{\varphi \geqslant \varphi_0} |T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)| \leqslant \rho_k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right), \tag{19}$$

где $\rho_k = \sup\limits_{\varphi \geqslant \varphi_0} |T_k(\varphi) - T_{k-1}(\varphi)|, \quad k = 2, 3, \ldots$

Кроме того,

$$|T_k(\varphi_0) - T_\xi(\varphi_0)| \leqslant \sup_{\varphi \geqslant \varphi_0} |T_k(\varphi) - T_\xi(\varphi)|. \tag{20}$$

Из полученных соотношений (18), (19) и (20) вытекает

Т е о р е м а 2. *Для погрешности* γ_k, *с которой получаемые приближения* $\delta[T_k(\varphi)]$ *воспроизводят динамический коэффициент* $\delta[T_\xi(\varphi)]$ *неравномерности движения машинного агрегата в периодическом режиме* $T = T_\xi(\varphi)$

на каждом шаге итерационного процесса (9), *справедлива оценка*

$$\gamma_k=\sup_{\varphi\geqslant\varphi_0}|\delta[T_k(\varphi)]-\delta[T_\xi(\varphi)]|\leqslant\ln\left[\frac{\rho_k}{\tau_*}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)+1\right],\quad k=2,3,\ldots \tag{21}$$

Пользуясь результатами статьи (6), можно показать, что

$$\rho_k=\sup_{\varphi\geqslant\varphi_0}|T_k(\varphi)-T_{k-1}(\varphi)|\leqslant q^{k-2}\rho_2,\quad k=2,3,\ldots \tag{22}$$

где

$$\rho_2=\sup_{\varphi\geqslant\varphi_0}|T_2(\varphi)-T_1(\varphi)|,\quad q=1-\lambda_1/\lambda_2,\quad 0\leqslant q\leqslant 1.$$

Из очевидного неравенства

$$\ln\left[\frac{\rho_k}{\tau_k}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)+1\right]\leqslant\frac{\rho_k}{\tau_*}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right) \tag{23}$$

и соотношений (21) и (22) следует, что

$$\gamma_k\leqslant\frac{\rho_2}{\tau_*}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)q^{k-2},\quad k=2,3,\ldots \tag{24}$$

Эта более грубая по сравнению с (21) оценка показывает, что скорость сходимости итерационного процесса (9) оказывается не медленнее скорости сходимости некоторой геометрической прогрессии со знаменателем $q-1-\lambda_1/\lambda_2$, $0\leqslant q<1$, и вполне достаточна для практических расчетов.

5. Заметим наконец, что динамический коэффициент неравномерности движения $\delta[T_\xi(\varphi)]$ является аддитивной функцией промежутка $[\varphi_0,\ \varphi]$ изменения угла поворота φ. Поэтому его величина зависит не только от текущего значения φ обобщенной координаты, но и от того положения φ_0, начиная с которого ведется регистрация динамической неравномерности движения машинного агрегата.

Поступило
6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Артоболевский,* ДАН, т. 57, № 3 (1952). [2] *I. I. Artobolevsky, V. S. Loshchinin,* J. Mech., v. 5, № 4-A, 1970. [3] *И. И. Артоболевский,* Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1952). [4] *В. С. Лощинин,* Тр. Инст. машиноведения, Семинар по теории машин и механизмов, т. 22 в. 8, Изд. АН СССР, 1961. [5] *В. С. Лощинин,* Тр. Инст. машиноведения, Семинар по теории машин и механизмов, т. 23, в. 91, Изд. АН СССР, 1962. [6] *В. С. Лощинин*, Изв. высш. учебн. завед., № 1 (1970).