Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517. 919 *МАТЕМАТИКА*

А. Б. ВАСИЛЬЕВА, В. А. ЕСИПОВА

УСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 28 XI 1973)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{1}$$

где z, y — M- и m-мерные векторы соответственно, $\mu>0$ — малый параметр.

Начальная задача для системы (1) хорошо изучена при достаточно общих условиях (см. ([1], [2])). Установлено, что решение этой задачи при $\mu\to0$ стремится к определенному решению вырожденной системы, получаемой из (1) при $\mu=0$. Более того, построена асимптотика решения начальной задачи по параметру μ, имеющая вид степенного по μ ряда с добавлением так называемых пограничных членов. Одним из условий справедливости такой асимптотики является требование, чтобы корни некоторого характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

Слабее исследован случай, когда характеристическое уравнение имеет корни как с отрицательными, так и с положительными действительными частями. Такой случай называется условно устойчивым. В условно устойчивом случае решение начальной задачи при $\mu\to0$, вообще говоря, не имеет предела. В ряде работ (см. ([3], [2])) для такого рода системы рассмотрена двухточечная краевая задача. При этом на систему накладывались дополнительные ограничения, которые связаны не с существом явления, а с методом исследования. Авторам настоящей заметки удалось снять эти ограничения. Полученный результат и будет изложен ниже.

Всюду в дальнейшем запись

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad \zeta=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}$$

будет означать, что квадратная $M\times M$ матрица A разбита на блоки размерами соответственно $k\times k$, $k\times(M-k)$, $(M-k)\times k$ и $(M-k)\times(M-k)$, а также вектор ζ разбит на блоки ζ_1 и ζ_2, причем ζ_1 состоит из первых k компонент ζ, а ζ_2 — из остальных $M-k$ компонент ζ.

Зададим для системы (1) краевые условия

$$z_1(0,\ \mu)=z_1^0,\quad z_2(1,\ \mu)=z_2^0,\tag{2}$$

$$y(0,\ \mu)=y^0.\tag{3}$$

Другими словами, на левом конце отрезка [0, 1] задается k компонент z, а на правом — остальные $M-k$ компонент.

Полагая в (1) $\mu=0$, получим вырожденную систему

$$0=F(\bar z,\bar y,t),\quad \frac{d\bar y}{dt}=f(\bar z,\bar y,t),\tag{4}$$

для которой зададим условие

$$\bar{y}(0)=y^0.$$

Пусть выполнены следующие требования:

1. *Функции* $F(z, y, t)$ *и* $f(z, y, t)$ *непрерывны и дифференцируемы в области* G *пространства переменных* (z, y, t).

2. *Уравнение* $F(z, y, t)=0$ *относительно* z *имеет в некоторой ограниченной замкнутой области* $\bar{D}$ *пространства переменных* (y, t) *решение (корень)* $z=\varphi(y, t)$ *такое, что*: a) $\varphi(y, t)$ *непрерывна в области* $\bar{D}$, b) *точки* $(\varphi(y, t), y, t)\in G$ *при* $(y, t)\in\bar{D}$, c) *корень* $z=\varphi(y, t)$ *является изолированным в* $\bar{D}$, d) $\operatorname{Det} F_z(\varphi(y, t), y, t)\neq 0$ *при* $(y, t)\in\bar{D}$.

3. *Второе из уравнений* (4), *в котором* $\bar{z}=\varphi(\bar{y}, t)$, *имеет при условии* (5) *единственное решение* $\bar{y}(t)$ *на отрезке* $[0, 1]$, *причем* $(\bar{y}(t), t)\in D$ *при* $t\in[0, 1]$.

4. *Собственные значения* $\lambda_i(t)$ *матрицы* $\bar{F}_z(t)\equiv F_z(\varphi(\bar{y}(t), t), \bar{y}(t), t)$ *(корни характеристического уравнения* $\operatorname{Det}(\bar{F}_z(t)-\lambda E_M)=0$) *удовлетворяют при* $0\leqslant t\leqslant 1$ *условиям*

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\lambda_i(t)<0, \quad i=1, 2, \ldots, k, \\ \operatorname{Re}\lambda_i(t)>0, \quad i=k+1, \ldots, M.\end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим матрицу $\bar{F}_z(t)$. Пусть $p(\lambda, t)$ — характеристический многочлен этой матрицы, причем $p(\lambda, t)=p_1(\lambda, t)p_2(\lambda, t)$, где $p_1(\lambda, t)$ имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, а $p_2(\lambda, t)$ — корни $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_M$. Согласно ([4]), существует k линейно независимых решений уравнения $p_1(\bar{F}_z(t), t)\overset{(1)}{z}=0$ и $M-k$ линейно независимых решений уравнения $p_2(\bar{F}_z(t), t)\overset{(2)}{z}=0$ при каждом t. Обозначим через $B(t)$ квадратную матрицу, столбцами которой являются по порядку указанные k и $M-k$ решений.

5. $\operatorname{Det} B_{11}(0)\neq 0, \quad \operatorname{Det} B_{22}(1)\neq 0.$

Замечание. Линейно независимые векторы $\overset{(1)}{z}(0)$ и $\overset{(2)}{z}(1)$ определяются неоднозначно, но отличие от нуля указанных в требовании 5 определителей не связано с выбором $\overset{(1)}{z}(0)$ и $\overset{(2)}{z}(1)$.

Введем в рассмотрение вспомогательные системы

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tau_0}=F(\tilde{\xi}+\varphi(\bar{y}(0), 0), \bar{y}(0), 0), \quad 0\leqslant\tau_0<\infty, \tag{7}$$

$$\frac{d\tilde{\tilde{\xi}}}{d\tau_1}=F(\tilde{\tilde{\xi}}+\varphi(\bar{y}(1), 1), \bar{y}(1), 1), \quad -\infty<\tau_1\leqslant 0. \tag{8}$$

При выполнении условий 4 система (7) имеет k-мерное интегральное многообразие S^+, обладающее тем свойством, что оно состоит из траекторий системы (7), стремящихся к началу координат при $\tau_0\to\infty$, а система (8) — $(M-k)$-мерное интегральное многообразие S^-, состоящее из траекторий системы (8), стремящихся к началу координат при $\tau_1\to-\infty$ (см. ([2])).

6. S^+ *в некоторой области* G^+ *изменения* $\tilde{\xi}_1$ *представимо в виде* $\tilde{\xi}_2=\Phi_2(\tilde{\xi}_1)$, *а* S^- *в некоторой области* G^- *изменения* $\tilde{\tilde{\xi}}_2$ *представимо в виде* $\tilde{\tilde{\xi}}_1=\Phi_1(\tilde{\tilde{\xi}}_2)$, *причем* $(z_1^0-\varphi_1(\bar{y}(0), 0))\in G^+$, *а* $(z_2^0-\varphi_2(\bar{y}(1), 1))\in G^-$.

Замечание. В линейном случае 6 последует из 5.

При указанных условиях 1—6 можно проделать следующие формальные построения. Будем искать решение задачи (1)—(3) в виде суммы трех слагаемых, представляющих собой формальные ряды (x означает y

и z в совокупности, $\tau_0=t/\mu$, $\tau_1=(t-1)/\mu$):

$$x(t,\ \mu)=\bar{x}(t,\ \mu)+\Pi x(\tau_0,\ \mu)+Qx(\tau_1,\ \mu), \tag{9}$$

где

$$\bar{x}(t,\ \mu)=\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\ldots \tag{10}$$

— регулярный ряд, а

$$\Pi x(\tau_0,\ \mu)=\Pi_0 x(\tau_0)+\mu\Pi_1 x(\tau_0)+\ldots, \tag{11}$$

$$Qx(\tau_1,\ \mu)=Q_0 x(\tau_1)+\mu Q_1 x(\tau_1)+\ldots \tag{12}$$

— левый и правый пограничные ряды. Формальное решение (9) оказывается на самом деле асимптотическим разложением решения задачи (1)—(3), что будет выражено приводимой ниже теоремой.

Члены разложений (10)—(12) определяются в результате подстановки (9) в систему (1) и в краевые условия (2), (3), как это подробно описано в ([2]), § 14, п. 5. В частности, $\bar{y}_0(t)$ совпадает с введенным выше $\bar{y}(t)$, а $\bar{z}_0(t)=\varphi(\bar{y}_0(t),\ t)$. Далее, $\Pi_0 y=Q_0 y=0$. $\Pi_0 z$ удовлетворяет системе (7), условию $(\Pi_0 z(0))_1=(z^0-\bar{z}_0(0))_1$ и условию стремления к нулю при $\tau_0\to\infty$, а $Q_0 z$ удовлетворяет системе (8), условию $(Q_0 z(0))_2=(z_0-\bar{z}_0(1))_2$ и условию стремления к нулю при $\tau_1\to-\infty$. Существование функций $\Pi_0 z$ и $Q_0 z$ обеспечено требованием 6.

Уже в нулевом порядке видно, что формальное решение (9) имеет следующую характерную структуру: оно состоит из суммы решения вырожденной ($\mu=0$) системы и двух пограничных членов $\Pi_0 x$ и $Q_0 x$ (отличных от нуля для z-компоненты решения), из которых левый является существенным в окрестности $t=0$, а далее с ростом t быстро «затухает», а правый имеет аналогичное поведение в окрестности $t=1$. Пограничные члены осуществляют поправку к решению вырожденной системы, так как последнее, вообще говоря, не удовлетворяет дополнительному условию (2) и, следовательно, не может служить хорошей аппроксимацией для истинного решения. Эта характерная структура сохраняется, если в (9) учесть члены более высокого порядка, но пограничные функции появляются уже как для z, так и для y-компонент.

Введем в рассмотрение кривую L, состоящую из трех звеньев:

$$L_1=\{(z,\ y,\ t)\ :\ z=\bar{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0),\ \tau_0\geqslant 0;\ y=\bar{y}_0(0);\ t=0\},$$

$$L_2=\{(z,\ y,\ t)\ :z=\bar{z}_0(t),\ y=\bar{y}_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\},$$

$$L_3=\{(z,\ y,\ t)\ :\ z=\bar{z}_0(1)+Q_0 z(\tau_1),\ \tau_1\leqslant 0;\ y=\bar{y}_0(1);\ t=1\}.$$

7. $F(z,\ y,\ t)$ *и* $f(z,\ y,\ t)$ *имеют непрерывные производные до* $n+2$ *порядка включительно в некоторой* δ*-трубке кривой* L.

Определим члены разложений (10)—(12) до номера n включительно и обозначим через $X_n(t,\ \mu)$ частичную сумму разложения (9), содержащую по $n+1$ слагаемых от каждого из рядов (10)—(12).

Теорема. *При выполнении условий* 1—7 *найдутся постоянные* $\mu_0>0$, $\delta>0$, $c>0$ *такие, что при* $0<\mu\leqslant\mu_0$ *в* δ*-трубке кривой* L *существует единственное решение* $x(t,\ \mu)$ *задачи* (1)—(3) *и имеет место неравенство*

$$|x(t,\ \mu)-X_n(t,\ \mu)|<c\mu^{n+1} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{13}$$

Доказательство сводится, как и в ([2]), к исследованию системы уравнений для компонент остаточного члена построенного разложения путем ее сведения к системе интегральных уравнений. Как и в ([2]), с этой целью сегмент $[0,\ 1]$ разбивается на три участка: $[0,\ t_0]$, $[t_0,\ t_1]$ и $[t_1,\ 1]$, где $t_0=-A\mu\ln\mu$, $t_1=1+A\mu\ln\mu$ (A достаточно большое, но фиксированное при $\mu\to 0$ число). На среднем участке, на основании результатов ([4]), система расщепляется подобно тому, как это делается в ([5]), а на крайних, как и в ([2]), строится функция Грина, однако это построение более сложно, чем в [2], так как учитывается возможность кратных собственных значений у матриц $\bar{F}_z(0)$ и $\bar{F}_z(1)$.

Замечания. 1. В работе [3] требовалось, чтобы величины $z_1^0 - \varphi_1(\bar{y}(0), 0)$ и $z_2^0 - \varphi_2(\bar{y}(1), 1)$ были достаточно малыми. В [2] это требование было снято, но зато дополнительно требовалось $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ при $i \neq j$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\operatorname{Re}\lambda_1(t) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_M(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и, кроме того, $\operatorname{Det} B_{22}(0) \neq 0$, $\operatorname{Det} B_{11}(1) \neq 0$. В данной работе все эти лишние условия снимаются.

2. Используя полученный результат и метод, изложенный в [2], § 13, можно исследовать более общую краевую задачу с условиями вида $R(x(0, \mu), x(1, \mu)) = 0$, где R — $(m+M)$-мерный вектор.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов*, Матем. сборн., т. 31 (73), № 3, 575 (1952). [2] *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, «Наука», 1973. [3] *В. А. Тупчиев*, ДАН, т. 143, № 6, 1296 (1962). [4] *Sibuya Yasutaka*, Math. Ann., v. 161, 67 (1965). [5] *Л. Флэтто, Н. Левинсон*, Сборн. пер. Математика, т. 2, 2, 61 (1958).