Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.553 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ГАВРИЛОВ

ПОВЕДЕНИЕ ВДОЛЬ ХОРД МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 29 X 1973)

В настоящей статье указывается новое доказательство теоремы Мейера, позволяющее получить усиление утверждения теоремы. Это доказательство опирается на теорему Коллингвуда о максимальности и свойства последовательностей P-точек. Мы получаем также усиление теоремы Плеснера ([1], стр. 196).

1. Обозначим через Ω, D, Γ и $h(\zeta, \alpha)$ соответственно расширенную комплексную плоскость, круг $|z|<1$, окружность $|z|=1$ и хорду круга D, оканчивающуюся в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол $\alpha, -\pi/2<\alpha<\pi/2$. Пусть $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\zeta, \alpha_1)$, $h(\zeta, \alpha_2)$ и окружностью $|z-{}^1/_2\zeta|={}^1/_2$. Для произвольных точек $a, b\in D$ и кривой $L\subset D$ положим $\sigma(a, b)={}^1/_2\ln[(1+u)/(1-u)]$, $u=|(a-b)/(1-\bar{a}b)|$, и $\sigma(a, L)=\inf\limits_{b\in L}\sigma(a, b)$.

Для произвольной действительной или комплексной функции $f(z)$, определенной в D, обозначим через $C(f, \zeta, D)$, $C(f, h(\zeta, \alpha))$ и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ предельные множества функции $f(z)$ в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ по кругу D, по хорде $h(\zeta, \alpha)$ и по углу $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$. Если функция $f(z)$ мероморфная в D, то, как это принято в теории предельных множеств, $F(f)$ обозначает множество точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых объединение $\bigcup\limits_{\Delta} C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ состоит из единственного значения. Символом $I(f)$ обозначают множество точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых пересечение $\bigcap\limits_{\Delta} C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ совпадает с Ω. И, наконец, $M(f)$ обозначает множество точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых пересечение $\bigcap\limits_{h} C(f, h(\zeta, \alpha))$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$ совпадает с $C(f, \zeta, D)$ и $C(f, \zeta, D)\neq\Omega$.

Множество точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых для произвольной функции $f(z)$, определенной в D, множества $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ одинаковы для всех углов $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta=e^{i\theta}$, обозначают через $K(f)$. Множество точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых $\bigcap\limits_{\Delta} C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))=C(f, \zeta, D)$, обозначим через $C(f)$.

Для мероморфной в D функции $f(z)$ положим $q_f(z)=(1-|z|)\rho(f(z))$, $\rho(f(z))=|f'(z)|[1+|f(z)|^2]^{-1}$. Функция $q_f(z)$ непрерывна в D. Следуя ([3]), последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$, называем последовательностью P-точек (короче P-последовательностью) для $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_\nu}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении $\bigcup\limits_{\nu}\{z\in D, \sigma(z, z_{n_\nu})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $w\in\Omega$, кроме, быть может, двух значений. Каждая последовательность точек $\{z_n\}$, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} q_f(z_n)=+\infty$, является P-последовательностью для $f(z)$ (([3]), стр. 4).

Точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$, если каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$, оканчивающаяся в $\zeta=e^{i\theta}$, содержит P-последовательность функции $f(z)$.

Точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если: 1) пересечение $\bigcap\limits_h C(f, h(\zeta, \alpha))$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$ в $\zeta=e^{i\theta}$ совпадает с Ω и 2) объединение $\bigcup\limits_\Delta C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ есть ограниченное множество.

2. Теорема 1. *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем $\Gamma=M(f)\cup I^*(f)\cup P(f)\cup E$, где E — множество 1-ой категории.*

Выделим в качестве лемм основные этапы в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. ((2), стр. 382, 395). *Для любой действительной или комплексной непрерывной в D функции $q(z)$ дополнение множества $C(q)$ относительно Γ является множеством 1-ой категории.*

Применим лемму 1 к функциям $f(z)$ и $q_f(z)$. Множество $M=C(f)\cap\cap C(q_f)$ имеет своим дополнением относительно Γ множество 1-ой категории. В произвольной точке $\zeta=e^{i\theta}\in M$ имеем четыре возможности:

(I) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D)\neq\Omega$;

(II) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D)=\Omega$;

(III) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D)=\Omega$;

(IV) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D)\neq\Omega$.

Отметим сразу, что возможность (IV) на самом деле не может быть реализована, так как условие неограниченности множества $C(q_f, \zeta, D)$ означает существование P-последовательности функции $f(z)$, стремящейся к точке $\zeta=e^{i\theta}$, и ведет, следовательно, к утверждению, что $C(f, \zeta, D)=\Omega$.

Если реализуется возможность (III), то каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta=e^{i\theta}$ содержит P-последовательность функции $f(z)$. Утверждение, что в этом случае $\zeta=e^{i\theta}\in P(f)$, будет следовать на основании леммы 2.

Лемма 2. *Хорда $h(\zeta, \alpha)$ не содержит P-последовательностей мероморфной в D функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда найдется некоторый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, охватывающий $h(\zeta, \alpha)$, в котором $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ ограничено.*

Необходимость условий леммы 2 доказана в (3), теорема 5. Для доказательства достаточности допустим, что по некоторому углу $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, охватывающему хорду $h(\zeta, \alpha)$, предельное множество $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ ограничено, но хорда $h(\zeta, \alpha)$ содержит P-последовательность $\{z_n\}$ функции $f(z)$. Согласно (4), теорема 3, найдется последовательность точек $\{z_n'\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(z_n, z_n')=0$, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} q_f(z_n')=+\infty$. Начиная с некоторого номера n, все точки z_n' попадут в угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, и, значит, $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ не ограничено. Противоречие доказывает лемму 2.

Утверждения, что $\zeta=e^{i\theta}\in M(f)$, если реализуется возможность (I), и что $\zeta=e^{i\theta}\in I^*(f)$, если реализуется возможность (II), следуют на основании определений множеств $M(f)$ и $I^*(f)$ и леммы 3.

Лемма 3. *Если для мероморфной в D функции $f(z)$ в некоторой точке $\zeta=e^{i\theta}\in K(f)$ множества $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ ограничены для любого угла $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta=e^{i\theta}$, то для всех хорд $h(\zeta, \alpha)$ в точке $\zeta=e^{i\theta}$ множества $C(f, h(\zeta, \alpha))$ одинаковы и совпадают с $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$. В частности, если в точке $\zeta=e^{i\theta}\in C(f)$ множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено, то $\bigcap\limits_h C(f, h(\zeta, \alpha))=C(f, \zeta, D)$.*

Чтобы доказать лемму 3, допустим, что найдутся хорда $h(\zeta, \alpha_0)$ и значение $a\in\Omega$, что $a\notin C(f, h(\zeta, \alpha_0))$, в то время как в каждом угле $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, охватывающем хорду $h(\zeta, \alpha_0)$, имеется последовательность точек $\{z_n^{(\Delta)}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(\Delta)}=\zeta$, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^{(\Delta)})=a$. Стягивая углы $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ к хорде $h(\zeta, \alpha_0)$, выберем из последовательностей $\{z_n^{(\Delta)}\}$ такую последовательность точек $\{z_\nu\}$, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu=\zeta$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu)=a$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma(z_\nu, h(\zeta, \alpha_0))=$

$=0$. Отметим на $h(\zeta, \alpha_0)$ такую последовательность точек $\{z_\nu'\}$, что $\lim_{\nu\to\infty} \sigma(z_\nu', z_\nu)=0$. По допущению, $\lim_{\nu\to\infty} f(z_\nu')\neq a$. Согласно ([4]), теорема 7, каждая из последовательностей $\{z_\nu\}$ и $\{z_\nu'\}$ является P-последовательностью для $f(z)$. Согласно лемме 2, по некоторому углу $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, охватывающему хорду $h(\zeta, \alpha_0)$, множество $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ должно быть неограниченным. Полученное противоречие доказывает лемму 3, а вместе с ней и теорему 1.

Замечание 1. Теорема 1 усиливает теорему Мейера, согласно которой для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем $\Gamma=M(f)\cup I(f)\cup E$, где E — множество 1-ой категории на Γ (([1]), стр. 204).

3. Теорема 2. *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем $\Gamma=F(f)\cup I^*(f)\cup P(f)\cup E$, $\operatorname{mes} E=0$.*

Этот результат усиливает теорему Плеснера, согласно которой $\Gamma=F(f)\cup I(f)\cup E$, $\operatorname{mes} E=0$, для любой мероморфной в D функции $f(z)$.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся результатом Е. П. Долженко (([1]), стр. 257), согласно которому для любой действительной или комплексной в D функции $q(z)$ имеем $\operatorname{mes} K(q)=2\pi$. Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in K(f)\cap K(q_f)$ и любого угла $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ имеем четыре возможности:

(I) множества $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ ограничены и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))\neq\Omega$;

(II) множества $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ ограничены и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))=\Omega$;

(III) множества $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ не ограничены и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))=\Omega$;

(IV) множества $C(q_f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ не ограничены и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))\neq\Omega$.

Как и выше, заключаем, что возможность (IV) не может реализоваться. Если реализуется возможность (III), то согласно лемме 2, $\zeta=e^{i\theta}\in P(f)$. Если реализуется возможность (II), то согласно лемме 3, $\zeta=e^{i\theta}\in I^*(f)$. Согласно одному результату Носиро (([5]), стр. 124, лемма 1), почти все точки $\zeta=e^{i\theta}$, в которых реализуется возможность (I), принадлежат множеству $F(f)$.

Примечание при корректуре. 4. Точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $J(f)$, если в каждом угле $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто все значения $w\in\Omega$, кроме, быть может, двух значений. Из определений следует, что $P(f)\subset J(f)$ для произвольной мероморфной функции $f(z)$ в D. Чтобы доказать, что обратное вложение не имеет места, рассмотрим нормальные мероморфные функции $f(z)$ первого рода в смысле Носиро (([6]), стр. 154). Для таких функций множество $P(f)$ пустое (([3]), стр. 5). С другой стороны, следствием теорем 1 и 2 и теоремы А. Гурвица является

Теорема 3. *Для произвольной нормальной мероморфной функции $f(z)$ первого рода в смысле Носиро имеем $I^*(f)=J(f)$ и $\Gamma=J(f)\cup E$, где $\operatorname{mes} E=0$ и E является множеством первой категории.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Коллингвуд, А. Ловатер,* Теория предельных множеств, М., 1971. [2] *E. F. Collingwood,* Math. Zs., B. 67, 377 (1957). [3] *А. И. Гаврилов,* Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., № 5, 3 (1965). [4] *В. И. Гаврилов,* Матем. сбор., т. 71 (113), 3, 386 (1966). [5] *К. Носиро,* Предельные множества, М., 1963. [6] *K. Noshiro,* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. I, v. 7, № 3–4, 149 (1939).