Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. ЕФИМОВ, Г. И. ЧЕРТАНОВ

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД КЛАССАМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 XI 1973)

В работах ([1-4]) указаны классы пространств, которые в пересечении с классом диадических бикомпактов дают класс метрических компактов. В этой работе мы определяем операции над классами топологических пространств, которые сохраняют это и ряд других свойств.

1.1. Пусть $X=\prod\{X_\alpha, \alpha\in A\}$ — тихоновское произведение топологических пространств, точка $p=(p_\alpha)\in X$ и γ — бесконечный кардинал. Через $\Sigma_{p,\gamma}\{X_\alpha, \alpha\in A\}=\{x=(x_\alpha)\in X, |\{\alpha\in A, x_\alpha\neq p_\alpha\}|<\gamma\}$ обозначается Σ_γ-произведение пространств X_α, $\alpha\in A$, с базисной точкой p ([4, 5]). Через $|A|$ обозначается мощность множества A. Кардиналы отождествляются с наименьшими ординалами данной мощности. Таким образом, ω_1 соответствует $\aleph_1$. Через γ^+ обозначается кардинал, следующий за γ. Пусть $\mathbf{P}\subset X$ и φ: $\mathbf{P}\to\gamma$ — произвольное отображение множества $\mathbf{P}$ в множество кардиналов $\leqslant\gamma$. Через $\Sigma(\{X_\alpha, \alpha\in A\}|\mathbf{P}, \varphi, \gamma)=\cup\{\Sigma_{p,\varphi(p)}\{X_\alpha, \alpha\in A\}, p\in\mathbf{P}, \varphi(P)\in\in\varphi(\mathbf{P})\}$ мы обозначаем $\Sigma_{\mathbf{P},\varphi,\gamma}$-произведение пространств X_α, $\alpha\in A$, с базисным множеством $\mathbf{P}$ и базисным отображением φ. Топология в $\Sigma_{\mathbf{P},\varphi,\gamma}$-произведении индуцирована из X.

1.2. Операция $\Sigma(\cdot|\mathscr{P}, \Phi, \gamma)$. Пусть $\mathscr{L}$ — класс пространств, обладающих свойством: если $X\in\mathscr{L}$, $Y\subset X$, причем Y — бикомпакт, то $Y\in\mathscr{L}$. Пусть $\mathscr{P}$ — некоторый класс подпространств, лежащих в произвольных произведениях элементов из $\mathscr{L}$, т. е. $(\mathrm{P}\in\mathscr{P})\Rightarrow(\exists A,\ \mathrm{P}\subset\Pi\{X_\alpha, \alpha\in A\}, X_\alpha\in\mathscr{L}, \forall\alpha\in A)$. Далее, пусть γ — бесконечный кардинал и Φ — некоторое множество отображений φ: $\mathrm{P}\to\gamma$, причем $\mathrm{P}\in\mathscr{P}$. Тогда через $\Sigma(\mathscr{L}|\mathscr{P}, \Phi, \gamma)$ мы обозначаем класс тех пространств X, для которых существует множество A и отображение $\varphi\in\Phi$ такое, что $X\subsetneq\Sigma(\{X_\alpha, \alpha\in A\}|\mathbf{P}, \varphi, \gamma)$, причем $\mathbf{P}\in\mathscr{P}$ и $X_\alpha\in\mathscr{L}$ для всех $\alpha\in A$. Далее, $\mathscr{D}$ обозначает класс всех диадических бикомпактов, $\mathscr{D}(\gamma)$ — класс диадических бикомпактов веса $<\gamma$, $MK=\mathscr{D}(\omega_1)$ — класс метрических компактов, $\mathscr{P}(\gamma)$ — класс, описанный выше, при условии, что для каждого $\mathrm{P}\in\mathscr{P}$ имеем $|\mathbf{P}|<\gamma$.

1.3. Теорема. *Для любого множества отображений* $\Phi=\{\varphi|\varphi: P\to\to\gamma^+, P\in\mathscr{P}(\gamma^{++})$ *справедливо*

$$[\mathscr{D}\cap\Sigma(\mathscr{L}|\mathscr{P}(\gamma^{++}), \Phi, \gamma^+)=\mathscr{D}(\gamma)]\Leftrightarrow[\mathscr{D}\cap\mathscr{L}=\mathscr{D}(\gamma)].$$

Отсюда в качестве следствия получаем

1.4. $[\mathscr{D}\cap\Sigma(\mathscr{L}|\mathscr{P}(\omega_1), \Phi, \omega_1)=MK]\Leftrightarrow[\mathscr{D}\cap\mathscr{L}=MK]$.

Таким образом, операция $\Sigma(\cdot, \mathscr{P}(\omega_1), \Phi, \omega_1)$ при любом Φ сохраняет свойство класса $\mathscr{L}$ не содержать неметризуемых диадических бикомпактов. Например, если $\mathscr{L}$ — класс пространств, не содержащих $\varkappa$-точек (в частности, $\mathscr{L}$ содержит класс экстремально несвязных пространств), то в классе $\Sigma_{\mathscr{P}}(\mathscr{L})=\Sigma(\mathscr{L}|\mathscr{P}(\omega_1), \Phi, \omega_1)$ любой диадический бикомпакт метризуем, так как этим свойством обладает класс $\mathscr{L}$ ([2, 4]). В то же время класс $\Sigma_{\mathscr{P}}(\mathscr{L})$ является существенным расширением класса $\mathscr{L}$. Другой пример можно получить, если в качестве $\mathscr{L}$ рассмотреть класс наследственно нормальных пространств. Заметим, что при условии (CH) «неметризуемый континуум Суслина S» принадлежит классу $\Sigma_{\mathscr{P}}(MK)$. Однако нам неизвестно, принадлежит ли S классу $\Sigma_{\omega_1}(MK)$. (Ср. 2.1.)

1.5. Пространство M называется γ-монолитным (ср. ([6])), если для любого $K\subset M$ такого, что $|K|<\gamma$, следует, что замыкание $\overline{K}$ является бикомпактом веса $<\gamma$. Через $m(X,\gamma)$ мы обозначаем степень γ-монолитности пространства X, полагая $m(X,\gamma)=\min\{|A|: X=\cup\{M_\alpha, \alpha\in A\},\ M_\alpha$ γ-монолитны для всех $\alpha\in A\}$. Через sX обозначается плотность пространства X. В основе доказательства теоремы 1.3 лежит следующая

1.6. Теорема. *Если $X=\Pi\{X_\alpha,\ \alpha\in A\}$ — тихоновское произведение хаусдорфовых пространств, γ — бесконечный кардинал, причем $|A|\geqslant\gamma^+$ и $2\leqslant sX_\alpha\leqslant\gamma$ для всех $\alpha\in A$, то $m(X,\gamma)\geqslant\gamma^+$.*

1.7. Пример. Пусть D^τ — канторовский дисконтинуум веса τ. Если $\tau=\omega_{\omega_0}$ — первый несчетный предельный кардинал, то $m(D^\tau,\omega_n)\geqslant\omega_{n+1}$, и в то же время $m(D^\tau,\tau)=1$. Последнее равенство выполнено при условии, что для всякого $\lambda<\tau$ следует $2^\lambda<\tau$.

2.1. Операция $\mathscr{K}(\cdot|\mathfrak{C},\gamma)$. Пусть $\mathscr{L}$ — класс пространств со свойством 1.2, класс $\mathscr{P}$ состоит из одной точки и γ — бесконечный кардинал. Тогда операцию $\Sigma(\cdot|\mathscr{P},\Phi,\gamma)$ будем обозначать через $\Sigma_\gamma(\cdot)$. Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторый класс отображений. Тогда класс $\mathfrak{C}(\mathscr{L})$ по определению состоит из тех пространств X, для которых существует $f\in\mathfrak{C}$ и $Y\in\mathscr{L}$ такие, что $X=f(Y)$. Положим $K_0(\mathscr{L})=\mathscr{L}$ и $K_1(\mathscr{L})=\Sigma_\gamma(\mathscr{L})$, $K_2(\mathscr{L})=\mathfrak{C}(K_1)$, $K_3(\mathscr{L})=$ $=\Sigma_\gamma(K_2),\ldots$

Если α — предельный ординал, то положим $K_\alpha(\mathscr{L})=\cup\{K_\beta(\mathscr{L}),\ \beta<\alpha\}$. Если $\alpha=\beta+n$, где β — предельный ординал, а n — натуральное число, то положим $K_\alpha(\mathscr{L})=K_n(K_\beta(\mathscr{L}))$. Наконец, обозначим через $\mathscr{K}(\mathscr{L}|\mathfrak{C},\gamma)$ наименьший класс пространств, содержащий все классы $K_\alpha(\mathscr{L})$.

2.2. Теорема. *Если $\mathscr{L}$ — класс линейно упорядоченных пространств, а $\mathfrak{C}$ — класс однозначных непрерывных отображений, то $\mathscr{K}(\mathscr{L}|\mathfrak{C},\gamma)\cap\mathscr{D}=$ $=\mathscr{D}(\gamma)$.*

Эта теорема справедлива также для $\mathscr{L}=T_\gamma$ — класса всех хаусдорфовых пространств тесноты $<\gamma$, так как $T_\gamma\subset CT_\gamma$.

2.3. Через cY обозначается степень клеточности пространства Y (число Суслина Y), а через tY — теснота пространства Y ([7]). Пусть γ — бесконечный кардинал. Мы скажем, что пространство X принадлежит классу CT_γ, если для всякого бикомпакта $Y\subset X$ из условия $cY<\gamma$ следует $tY<\gamma$. Теорема 2.2 доказывается с помощью следующей теоремы.

2.4. Теорема. *Класс CT_γ наследствен по подпространствам, замкнут относительно однозначных непрерывных совершенных отображений, т. е. $\mathfrak{C}(CT_\gamma)=CT_\gamma$, и замкнут относительно операций Σ_γ, т. е. $\Sigma_\gamma(CT_\gamma)=CT_\gamma$, если $\gamma\geqslant\omega_1$.*

2.5. Следствие. *Если $\mathscr{L}$ — класс линейно упорядоченных пространств, то $\mathscr{K}(\mathscr{L}|\mathfrak{C},\gamma)\subset CT_\gamma$.*

3.1. Операция $\mathfrak{C}(\cdot)$. В дальнейшем через $\mathfrak{C}$ обозначается класс непрерывных неприводимых многозначных отображений ([8]). Обозначим через $\pi s(X)=\sup\{sY,\ Y\subset X,\ \overline{Y}=X\}$ кардинальный инвариант пространства X, который мы назовем π-плотностью X. Заметим, что $sX\leqslant\pi sX\leqslant$ $\leqslant\pi wX\leqslant wX$, где πwX обозначает π-вес пространства X ([8]), а wX — вес пространства X. Заметим далее, что, если $Y=f(X)$ и $f\in\mathfrak{C}$, то $\pi sX=\pi sY$. Пространство X назовем π-совершенным, если $\pi sX=\pi wX$.

3.2. Теорема. *Тихоновское произведение π-совершенных хаусдорфовых пространств является π-совершенным хаусдорфовым пространством.*

3.3. Теорема. *Класс π-совершенных пространств содержит все бикомпакты, соабсолютные с линейно упорядоченными или с диадическими бикомпактами.*

3.4. Заметим, что в силу 3.3 канторовский дисконтинуум D^{ω_1} веса ω_1 является π-совершенным. С другой стороны, $sD^{\omega_1}=\omega_0$, поэтому, если M — счетное всюду плотное подпространство D^{ω_1}, то $\pi sM=\omega_0$ и $\pi wM=\pi wD^{\omega_1}=$

$=\omega_1$. Отсюда M не является π-совершенным пространством. Мы не знаем, является ли всякий бикомпакт π-совершенным?

3.5. Теорема. *Если* γ — *любой кардинал, то* $\mathfrak{C}(CT_\gamma)\cap\mathscr{D}=\mathscr{D}(\gamma)$.

3.6. Следствие. *Всякий диадический бикомпакт, соабсолютный с бикомпактом, имеющим счетную тесноту, метризуем.*

3.7. Следствие. *Любое бикомпактное расширение счетного пространства* M *(см. 3.4.) имеет несчетную тесноту.*

Впервые пример такого пространства указан в ([9]).

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. А. Шанин*, ДАН, т. 53, 777 (1946). [2] *R. Engelking, A. Pelczinski*, Coll. Math., v. 11, 55 (1963). [3] *С. Мардешич, П. Папич*, ДАН, т. 143, 529 (1962). [4] *Б. А. Ефимов*, ДАН, т. 152, 794 (1963). [5] *H. H. Corson*, Am. J. Math., v. 81, 785 (1959). [6] *А. В. Архангельский*, ДАН, т. 184, 767 (1969). [7] *А. В. Архангельский, В. И. Пономарев*, ДАН, т. 182, 993 (1968). [8] *В. И. Пономарев*, УМН, т. 21, № 4, 101 (1966). [9] *В. И. Малыхин*, ДАН, т. 206, № 4, 1293 (1972).