Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 23 X 1973)

Рассматривается дискретный оператор типа Винера — Хопфа вида

$$(\mathfrak{A}\varphi)_n=\varphi_n-e^{i\omega n}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k=f_n,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

при обычных предположениях $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\in l_1$; $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\in l_{p+}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $c_+{}^0$.

Как известно [1], при $\omega=0$ нётеровость и индекс оператора (1) определяются функцией $\sigma(t)=1-a(t)=1-\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_kt^k$, называемой символом. В [2] показано, что при рациональном $\omega/(2\pi)$ символ оператора (1) выглядит сложнее: $\sigma(t)=1-a(t)a(te^{i\omega})\ldots a(te^{i(m-1)\omega})$; $\omega/(2\pi)=r/m$; $(r,m)=1$. Условие $\sigma(t)\neq0$, $|t|=1$, необходимо и достаточно для нётеровости оператора (1), при этом его индекс $\varkappa(\mathfrak{A})=-\dfrac{1}{m}\operatorname{ind}\sigma(t)$.

Мы здесь будем рассматривать случай иррационального $\omega/(2\pi)$ при следующих предположениях:

а) функция $a(t)$ не обращается в нуль:

$$a(t)\neq0,\quad |t|=1; \tag{2}$$

б) число ω таково, что $\omega/(2\pi)$ медленно приближается рациональными числами, т. е.

$$|\omega/(2\pi)-m/n|>c/n^{\gamma} \tag{3}$$

для любых целых m и $n>0$ ($c=c(\omega)$, $\gamma=\gamma(\omega)$ — постоянные, зависящие только от ω).

Заметим, что условие (3) выполняется при почти иррациональных $\omega/(2\pi)$, при этом можно взять $\gamma=2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Именно, справедливо следующее утверждение: для любого $\varepsilon>0$ и для почти всех $\alpha\in(0,2\pi)$ существует $c=c(\alpha)$, так что $|\alpha-m/n|>c/n^{2+\varepsilon}$ для любых целых m и $n>0$ ([3, 4], см. также [5]). Среди оставшихся чисел есть такие, скорость приближения которых рациональными может оказаться сколь угодно высокой (см. [4]), так что неравенство (3) для них невыполнимо.

При предположениях (2), (3) получены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $\mathfrak{A}$ и вычислен его индекс. Оказывается, что нётеровость оператора (1) определяется средним значением ρ_a функции $\ln|a(t)|$ по единичной окружности:

$$\rho_{a(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a(e^{i\sigma})|\,d\sigma. \tag{4}$$

Сформулируем основной результат (см. п. 3°).

Теорема 1. *Пусть $a(t)\neq 0$, $|t|=1$, и $\omega/(2\pi)$ — иррациональное число, медленно приближаемое рациональными числами. Для того чтобы оператор $\mathfrak{A}$ вида (1) был нётеров в пространствах $l_{p+}(1\leqslant p\leqslant\infty)$, c_+^0, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_{a(t)}\neq 0$. При выполнении условия $\rho_{a(t)}\neq 0$ индекс оператора $\mathfrak{A}$ вычисляется по формуле*

$$\varkappa(\mathfrak{A})=\begin{cases}0, & \text{если } \rho_{a(t)}<0,\\ -\operatorname{ind} a(t), & \text{если } \rho_{a(t)}>0.\end{cases} \tag{5}$$

Аналогичный результат может быть получен для более общих операторов типа парных операторов свертки.

Исследование основывается на «факторизации со сдвигом» [6] достаточно гладких функций, которая становится возможной благодаря известным оценкам малых знаменателей (см. [3-4]).

1°. Введем ряд обозначений. Пусть

$$(A\varphi)_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots; \tag{6}$$

$$(\tau_l\varphi)_n=\varphi_{n-l}, \quad (Q\varphi)_n=e^{i\omega n}\varphi_n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots; \tag{7}$$

$$(P_+\varphi)_n=\{\ldots,\ 0,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ldots\}, \quad P_-=I-P_+.$$

Функция $a(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$ называется символом оператора свертки вида (6). Очевидно τ_l — оператор свертки с символом t^l.

В силу леммы 3 из [7] оператор (1) одновременно нётеров и имеет одинаковый индекс (и даже дефектные числа) с оператором

$$K=(I-QA)P_++P_-, \tag{1^1}$$

рассматриваемым в пространствах $l_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$, c^0. Поэтому вместо (1) достаточно исследовать оператор (1^1).

2°. Здесь мы рассмотрим оператор вида $I-QA$. Прежде всего изучим простейший оператор вида $I-\lambda\tau_l Q$, являющийся частным случаем оператора $I-QA$ при $a(t)=a_l t^l$, при этом мы не будем требовать от $\omega/(2\pi)$ выполнения условия (3) (при $l=0$ ср. также с [8]).

Лемма 1. *Пусть $\omega/(2\pi)$ — иррациональное число. Следующие условия эквивалентны:* а) *оператор $I-\lambda\tau_l Q$ нётеров*; б) *оператор $I-\lambda\tau_l Q$ обратим;* в) $|\lambda|\neq 1$. *Если $|\lambda|=1$, то образ оператора $I-\lambda\tau_l Q$ не замкнут.*

Очевидно, что при $|\lambda|\neq 1$ оператор $I-\lambda\tau_l Q$ обратим.

Пусть теперь от противного $|\lambda_0|=1$, а оператор $I-\lambda_0\tau_l Q$ нётеров. Воспользуемся равенствами

$$(I-\lambda\tau_l Q)\tau_s=\tau_s(I-\lambda e^{i\omega s}\tau_l Q), \quad s=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{8}$$

Множество $\{\lambda e^{i\omega s}\}_{s=0}^{\infty}$ плотно (см., например, [4, 8]) на единичной окружности и, следовательно, в силу устойчивости свойства нётеровости, при некотором s оператор $I-\lambda e^{i\omega s}\tau_l Q$ нётеров. Тогда из (8) следует, что оператор $I-\lambda\tau_l Q$ оказывается нётеровым при всех λ, $|\lambda|=1$. Но тогда оператор $Q^{-1}\tau_{-l}-\lambda I$ нётеров при всех комплексных λ, что невозможно в бесконечномерном пространстве [9].

Лемма 2. *Пусть $a(t)\neq 0$, $|t|=1$, и $\omega/(2\pi)$ — иррациональное число, медленно приближаемое рациональными числами. Для того чтобы оператор $I-QA$ был нётеров (обратим) в пространствах $l_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$, c^0, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_{a(t)}\neq 0$.*

Доказательство основано на возможности «факторизации со сдвигом» функции

$$b(t)=\frac{a(t)}{a(t_0)}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-l} e^{-\eta_0}$$

где $l = \operatorname{ind} a(t)$ и

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\ln \left[\frac{a(t)}{a(t_0)} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-l} \right]}{t} dt, \quad \ln 1 = 0.$$

Если $a(t)$ — достаточно гладкая функция (мы будем считать ее даже бесконечно дифференцируемой), то для $b(t)$ выполнены все условия 1)—4) из ([6]), необходимые для факторизуемости, так что справедливо представление

$$b(t) = \frac{v(te^{-i\omega})}{v(t)}, \quad v(t) \neq 0, \quad \operatorname{ind} v(t) = 0. \tag{9}$$

Обозначим

$$(V\varphi)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{n-k}\varphi_k, \quad v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k t^k, \quad \lambda_a = \frac{a(t_0)}{t_0{}^l} e^{\eta_0}.$$

Представление ([9]) порождает факторизацию оператора $\lambda_a^{-1}\tau_{-l}A$ в виде $\lambda_a^{-1}\tau_{-l}A = Q^{-1}VQ \cdot V^{-1}$, где V, V^{-1}, $Q^{-1}VQ$ — операторы свертки вида (6). Но тогда

$$I - QA = V(I - \lambda_a e^{i\omega l}\tau_l Q) V^{-1}. \tag{10}$$

Из (10) с учетом леммы 1, следует справедливость леммы 2 для случая бесконечно дифференцируемой функции $a(t)$.

Для произвольной функции $a(t) \in W$ доказательство леммы 2 основано на приближении $a(t)$ бесконечно дифференцируемой функцией. При этом в достаточной части используется тот факт, что при малых ε числа $\rho_{a(t)}$ и $\rho_{a_\varepsilon(t)}$ имеют один и тот же знак. В необходимой части, предполагая противное, приходим к нётерову оператору $I - QA_\varepsilon$, символ которого $a_\varepsilon(t) \in C^\infty$, $|t| = 1$, и $\rho_{a_\varepsilon(t)} = \rho_{a(t)} = 0$, что невозможно.

3°. Здесь мы в основных чертах наметим доказательство теоремы 1.

а) Достаточность. Так как $(I - QA)P_+ - P_+(I - QA)$ — вполне непрерывный оператор, то согласно следствию из леммы 2 в ([2]) (ср. также с леммой 2 из ([10])), нётеровость оператора $I - QA$ влечет нётеровость оператора (1) и (1[1]), что доказывает достаточность в теореме 1.

б) Формула для индекса. Пусть $a(t) \in C^\infty$, $|t| = 1$. Используя (10), получаем равенство

$$(I - QA)P_+ + P_- = (VP_+ + P_-)\{(I - \lambda_a e^{i\omega l}\tau_l Q)P_+ + P_-\}(V^{-1}P_+ + P_-) + T_1, \tag{11}$$

где T_1 — вполне непрерывный оператор, откуда с учетом $\operatorname{ind} v(t) = 0$, следует $\varkappa[(I - QA)P_+ + P_-] = \varkappa(I - \lambda_a e^{i\omega l}\tau_l QP_+)$. При $\rho_a < 0$ имеем $\|\lambda_a e^{i\omega l}\tau_l QP_+\| = |\lambda_a| < 1$, так что оператор $I - \lambda_a e^{i\omega l}\tau_l QP_+$ обратим и формула (5) доказана при $\rho_a < 0$ и $a(t) \in C^\infty$, $|t| = 1$. Если $a(t) \in W$, то формула для индекса при $\rho_a < 0$ доказывается приближением, при этом следует учесть, что при достаточно малых приближениях свойство $\rho_{a_\varepsilon} < 0$ при $\rho_a < 0$ сохраняется.

Наконец, в случае $\rho_a > 0$ перепишем оператор (1[1]) в виде

$$(I - QA)P_+ + P_- = (QP_+ + P_-)(AP_+ + P_-)\{(A^{-1}Q^{-1} - I)P_+ + P_-\} + T_2,$$

где T_2 — вполне непрерывный оператор. Оператор $QP_+ + P_-$ обратим: $(QP_+ + P_-)^{-1} = Q^{-1}P_+ + P_-$. Так как $\rho_{1/a} = -\rho_a < 0$, то согласно предыдущему оператор $(A^{-1}Q^{-1} - I)P_+ + P_-$ также обратим. Поэтому индекс нашего оператора (1[1]) совпадает с индексом оператора $AP_+ + P_-$ типа Винера — Хопфа и равен $-\operatorname{ind} a(t)$.

в) Доказательство необходимости проводится от противного. Считаем, что $\rho_{a(t)} = 0$ и что $(I - QA)P_+ + P_-$ нётеров. Пусть еще $a(t) \in C^\infty$, $|t| = 1$. Тогда имеет место (11), откуда следует, что оператор $M = (I - \lambda\tau_l Q)P_+ + P_-$

нётеров при некотором $\lambda=\lambda_0=\lambda_a e^{i\omega l}$. Как и при доказательстве леммы 1, тогда нетрудно получить, что M нётеров при всех λ, $|\lambda|=1$. Рассматривая композицию $\Omega M \Omega$, где $(\Omega\varphi)_n=\varphi_{-n}$, $n=0, \pm 1, \ldots$, $\Omega^2=I$ нетрудно увидеть, что при всех λ, $|\lambda|=1$, оператор $(I-\bar{\lambda}\tau_l Q)P_-+P_+$ нётеров. Но тогда композиция $\{(I-\lambda_0\tau_l Q)P_++P_-\}\{(I-\lambda_0\tau_l Q)P_-+P_+\}=(I-\lambda_0\tau_l Q)+T_3$ нётерова, где T_3 — вполне непрерывный оператор, что невозможно, так как $|\lambda_0|=1$ (см. лемму 1). Для произвольной $a(t)\in W$ доказательство необходимости проводится приближением.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть* $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $|t|=1$, *и* $\omega/(2\pi)$ — *иррациональное число, медленно приближаемое рациональными числами. Для того чтобы оператор* $(A-QB)P_++P_-$ *был нётеров в пространствах* l_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, c^0, *необходимо, чтобы* $\rho_{a(t)}\neq\rho_{b(t)}$; *при этом*

$$\varkappa[(A-QB)P_++P_-]=-\begin{cases}\operatorname{ind} a(t), & \text{если } \rho_{a(t)}>\rho_{b(t)},\\ \operatorname{ind} b(t), & \text{если } \rho_{a(t)}<\rho_{b(t)}.\end{cases}$$

Ростовский государственный
университет

Поступило
15 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Г. Крейн*, УМН, т. 13, в. 5, 3 (1958). [2] *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*, ДАН, т. 200, № 1, 17 (1971). [3] *A. Wintner*, Duke Math. J., v. 12, № 3, 445 (1945). [4] *В. И. Арнольд*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 21 (1961). [5] *А. А. Бухштаб*, Теория чисел, М., 1960. [6] *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*, Изв. АН АрмССР, т. 5, в. 5, 448 (1970). [7] *И. Б. Симоненко*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5, 1138 (1968). [8] *А. Б. Антоневич*, Псевдодифференциальные операторы со сдвигом. Седьмая летняя матем. школа АН УкрССР, Инст. матем., Киев, 1970, стр. 264. [9] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, УМН, т. 12, в. 2, 43 (1957). [10] *В. Г. Кравченко*, ДАН, т. 201, № 6, 1275 (1971).