Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.948.32 *МАТЕМАТИКА*

Ю. И. КАРЛОВИЧ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ СО СДВИГОМ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ОБЛАСТЬ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 5 XI 1973)

1°. Пусть контур Γ состоит из простых разомкнутых ориентированных дуг Ляпунова Γ_r, $r=1, 2, \ldots, r_0$, пересекающихся лишь в концах и при этом не касающихся одна другой *. На каждой дуге Γ_r задана такая функция $\beta_r(t)$, что $0\neq\beta_r'(t)\in H(\Gamma_r)$, $\beta_r(t)\notin\Gamma$ для внутренних точек дуги Γ_r и линия $\beta_r(\Gamma_r)$ некасательна к Γ. Полагаем $\beta(t)=\beta_r(t)$ при $t\in\Gamma_r$, $r=1, 2, \ldots, r_0$. Очевидно, множество $\gamma=\beta(\Gamma)\cap\Gamma$ либо пустое, либо конечное.

Введем следующие обозначения: $\Lambda_n(\Gamma)$ — множество квадратных матриц порядка n, непрерывных на каждой дуге Γ_r; I — тождественный оператор, T — вполне непрерывный оператор, а S и D — операторы, определяемые равенствами

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\qquad (D\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\beta(t)},\qquad t\in\Gamma. \tag{1}$$

Л е м м а. *Оператор D ограничен в пространстве $L_p^n(\Gamma)$, $1<p<\infty$.*

Из этой леммы и теоремы 1 из ([1]) вытекает, что оператор

$$K=a(t)I+b(t)S+c(t)D+T, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)\in\Lambda_n(\Gamma)$, тоже ограничен в пространстве $L_p^n(\Gamma)$, $1<p<\infty$. Ставится задача нахождения условий нётеровости и индекса оператора (2).

2°. Пусть $\beta(t_0)$ — множество всех образов точки t_0. γ-комплексом назовем множество Δ, состоящее из всех точек множества γ, удовлетворяющих условию: для любых точек t_0, $\tilde t\in\Delta$ найдутся такие точки $t_1, t_2, \ldots, t_k\in\Delta$, что $t_k=\tilde t$ и $t_i\in\beta(t_{i-1})$, $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть W — множество всех γ-комплексов контура Γ, Φ — множество точек всех γ-комплексов, а F — множество концов дуг Γ_r. В дальнейшем полагаем, что в точках $t\in\Phi$ дуги контура Γ выходящие.

Переходим к исследованию оператора (2). Пусть $\Gamma_\Phi=\bigcup_{t\in\Phi}\Gamma_t$ и $\Gamma_\Delta=\bigcup_{t\in\Delta}\Gamma_t$, где Γ_t — такая окрестность на Γ точки $t\in\Phi$, что $\overline{\Gamma}_t\cap(\gamma\cup F)=\{t\}$. Легко видеть, что $\overline{\Gamma}_z\cap\overline{\Gamma}_t=\emptyset$, $z\neq t$. Полагаем $d_\pm(t)=a(t)\pm b(t)$, $t\in\Gamma$.

В пространстве $L_p^n(\Gamma)$ рассмотрим оператор

$$K'=f(t)I+h(t)S, \tag{3}$$

где $f(t)$ и $h(t)$ — такие матрицы из $\Lambda_n(\Gamma)$, что $f(t)=a(t)$ и $h(t)=b(t)$ для $t\in\Gamma\setminus\Gamma_\Phi$, $\det[f(t)\pm h(t)]\neq0$ для $t\in\Gamma_\Phi\setminus\Phi$ и $\lim\limits_{\tau\to t}[f(\tau)\pm h(\tau)]=E_n$ для всех $t\in\Phi$, где E_n — единичная матрица порядка n.

---

* Дуги Γ_k и Γ_j считаем некасательными в точке $z\in\Gamma_k\cap\Gamma_j$, если

$$\lim_{t\to z,\ t\in\Gamma_k}(t-z)/|t-z|\neq\lim_{t\to z,\ t\in\Gamma_j}(t-z)/|t-z|.$$

Если оператор (2) нётеров, то на основании локального принципа (см., например, [2]) нётеров и оператор (3), а тогда (см. [3, 4]) в пространстве $L_p^n(\Gamma)$ ограничены все операторы

$$K_\Delta = a_\Delta(t)I + b_\Delta(t)S + c_\Delta(t)D, \tag{4}$$

где $a_\Delta(t) \pm b_\Delta(t) = [f(t) \pm h(t)]^{-1} d_\pm(t)$ и $c_\Delta(t) \equiv c(t)$ при $t \in \Gamma_\Delta$ и $a_\Delta(t) \equiv E_n$, $b_\Delta(t) \equiv c_\Delta(t) \equiv 0$ при $t \in \Gamma \diagdown \Gamma_\Delta$. Справедлива

Теорема 1. *Оператор* (2) *нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы все операторы* (3) *и* (4). *Кроме того,*

$$\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} K' + \sum_{\Delta \in W} \operatorname{Ind} K_\Delta. \tag{5}$$

Теория Нётера оператора (3) построена в работах [3, 4]. Таким образом, достаточно изучить операторы (4).

Пусть W_1 — множество таких γ-комплексов Δ, что:

А) $\beta_i'(z) = \beta_j'(z)$, если $\beta_i(z) = \beta_j(z) = t$, z, $t \in \Delta$; i, $j = 1, 2, \ldots, r_0$, и при этом полагаем $\beta'_{z,t} = \beta_i'(z)$;

Б) $\beta'_{z_1,z_2} \cdot \beta'_{z_2,z_3} \ldots \beta'_{z_{k-1},z_k} \cdot \beta'_{z_k,z_1} = 1$, $k \geqslant 1$, если $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \Delta$ и $z_{i+1} \in \beta(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где $z_{k+1} = z_1$.

Обозначим через W_2 множество таких γ-комплексов Δ, что:

В) все углы между дугами контура $\Gamma_\Delta \cup \beta(\Gamma_\Delta)$ в точках $t \in \Delta$ являются рациональными частями 2π; и выполняются условия А) и Б), в которых $\beta_k'(z)$ и $\beta'_{z,t}$ заменены на $|\beta_k'(z)|$ и $r_{z,t}$.

В дальнейшем полагаем, что $W = W_1 \cup W_2$.

Пусть t_0 и $\tilde{t}$ — такие точки из $\Delta \in W_1$, что $\tilde{t} \notin \beta(t_0)$. Тогда обозначим $\beta'_{t_0,\tilde{t}} = \beta'_{t_0,t_1} \cdot \beta'_{t_1,t_2} \ldots \beta'_{t_{k-1},\tilde{t}}$. Аналогично задаются числа $r_{t_0,\tilde{t}}$, если $\Delta \in W_2$.

3°. Построим операторы без сдвига, эквивалентные * операторам (4). Пусть $\Delta \in W$ и дуги Γ^i, $i = 1, 2, \ldots, q$, с началом $x_i \in \Delta$ составляют контур Γ_Δ. Не ограничивая общности, длины дуг Γ^i считаем равными $\delta r_{x_1,x_i}$**, где δ — такая постоянная, что круги $U(x_i)$: $|z - x_i| \leqslant \delta r_{x_1,x_i}$ либо не пересекаются, либо совпадают. Пусть l_Δ — контур, состоящий из отрезков l_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, с началом x_i и концом $y_i = x_i + \varepsilon_i \delta r_{x_1,x_i}$, где $\varepsilon_i = \lim (t - x_i)/|t - x_i|$ при $t \to x_i$ по дуге Γ^i. На контуре l_Δ задаем функцию $\eta(t)$ так, чтобы $\eta(l_i) = \Gamma^i$ и для $t \in l_i$ расстояние по дуге Γ^i между точками $\eta(t)$ и x_i равнялось $|t - x_i|$.

Пусть теперь $\Delta \in W_1$ и $\Delta = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$. Так как линия $\beta(\Gamma)$ не касательна к Γ, то из условия Б) вытекает, что $t \notin \beta(t)$ для всех $t \in \Delta$. Следовательно, $m > 1$. На множестве $U = \bigcup_{k=1}^{m} U(z_k)$ задаем функцию $\alpha(z)$ равенствами

$$\alpha(z) = \beta'_{z_k,z_{k+1}} \cdot (z - z_k) + z_{k+1} \text{ при } z \in U(z_k), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

где $z_{m+1} = z_1$. Обозначим $\alpha_0(z) \equiv z$, $\alpha_s(z) \equiv \alpha[\alpha_{s-1}(z)]$, $s \geqslant 1$. Из условия Б) получаем, что $\alpha_m(z) \equiv z$ для $z \in U$. Пусть $Z_\Delta = \bigcup_{k=1}^{m} \alpha_k(l_\Delta)$ и Z_Δ' — связная компонента контура Z_Δ, содержащая точку z_1. Ориентируем контур Z_Δ так, чтобы дуги контура были направлены от точек $z_k \in \Delta$.

---

* Операторы M_1 и M_2 назовем эквивалентными ($M_1 \sim M_2$), если они нётеровы лишь одновременно и $\operatorname{Ind} M_1 = \operatorname{Ind} M_2$.

** $r_{x_1,x_i} = |\beta'_{x_1,x_i}|$, если $\Delta \in W_1$.

Пусть $(B_\alpha\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)]$ $(t\in Z_\Delta)$; $a_0(t)\equiv a_\Delta[\eta(t)]$ и $g_0(t)\equiv b_\Delta[\eta(t)]$ при $t\in l_\Delta$ и $a_0(t)\equiv E_n$, $g_0(t)\equiv 0$ при $t\in Z_\Delta\setminus l_\Delta$. Полагаем $g_k(t)\equiv c_\Delta[\eta(t)]$, $k=1, 2, \ldots, m-1$, при тех $t\in l_\Delta\cap U(z_i)$, для которых $\beta[\eta(t)]\in U(z_{i+k})$ *, $i=1, 2, \ldots, m$, и $g_k(t)\equiv 0$ для остальных $t\in Z_\Delta$.

Применяя теоремы 1, 3 из [5], получаем, что оператор K_Δ эквивалентен действующему в пространстве $L_p{}^n(Z_\Delta)$ оператору

$$\tilde{K}_\Delta=a_0(t)I+\sum_{k=0}^{m-1} g_k(t)B_\alpha{}^kS \tag{7}$$

со сдвигом Карлемана $\alpha(t)$ **. В свою очередь, оператор (7) эквивалентен (см. [6]) ограниченному в $L_p{}^{mn}(Z_\Delta')$ оператору

$$M_\Delta=A_\Delta(t)I+G_\Delta(t)S, \tag{8}$$

где $A_\Delta(t)=\|\delta_{ij}a_0[\alpha_{i-1}(t)]\|_{i,j=1}^m$, $G_\Delta(t)=\|g_{j-i}[\alpha_{i-1}(t)]\|_{i,j=1}^m$, $t\in Z_\Delta'$, δ_{ij} — символ Кронекера и $g_{-k}(t)\equiv g_{m-k}(t)$, $k=1, 2, \ldots, m-1$.

Теорема 2. *Если* $\Delta\in W_1$, *то* $K_\Delta\sim M_\Delta$.

Пусть $\Delta\in W_2$. Полагаем $\gamma_i=\lim[\beta(t)-\beta(x_i)]/|\beta(t)-\beta(x_i)|$ при $t\to x_i$ по дуге Γ^i, $i=1, 2, \ldots, q$; $\psi_{ij}=\varepsilon_i\varepsilon_j^{-1}$, если $x_i=x_j$; $\omega_{ij}=\gamma_i\varepsilon_j^{-1}$, если $\beta(t)\to x_i$ при $t\to x_i$ по дуге Γ^i; и $\psi_{ij}=0$, $\omega_{ij}=0$ для остальных $i, j=1, 2, \ldots, q$. Обозначим через N наименьшее натуральное число, для которого каждое из чисел $(\omega_{ij})^N$ и $(\psi_{ij})^N$, i, j$=1, 2, \ldots, q$, равно либо единице, либо нулю. В силу условия В) такое N существует. Полагаем

$$0^0=0;\quad \psi_k=\|(\psi_{ij})^kE_n\|_{i,j=1}^q,\quad \Omega_k=\|(\omega_{ij})^kE_n\|_{i,j=1}^q,\quad k=0, 1, \ldots, N-1;$$

$$A(t)=\delta_{ij}a_\Delta[\eta(\sigma_i(t))]\|_{i,j=1}^q,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad \text{где } \sigma_i(t)=x_i+t^{1/N}(y_i-x_i),$$

и аналогично определяем матрицы $B(t)$ и $C(t)$. Согласно [7] оператор

$$M_\Delta'=A(t)I+\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[B(t)\psi_k+C(t)\Omega_k]R_k, \tag{9}$$

где $R_k=t^{k/N}St^{-k/N}I$, ограничен в пространстве $L_p{}^{nq}([0, 1], \rho)$ с весом $\rho(t)=t^{1/N-1}$. Справедлива

Теорема 3. *Если* $\Delta\in W_2$, *то* $K_\Delta\sim M_\Delta'$.

Используя результаты работ [3, 7, 8], получаем теорию Нётера оператора (9).

4°. Пусть $K_0(t, \mu)$, $t\in\Gamma$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$,— символ оператора

$$K_0=a(t)I+b(t)S, \tag{10}$$

действующего в $L_p{}^n(\Gamma)$ (см. [4]). Тогда

$$\det K_0(t, \mu)=\det d_+(t)d_-(t),\quad t\in\Gamma\setminus F,\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1. \tag{11}$$

Пусть точка $t\in F$ является общим концом ν дуг контура Г. Пронумеруем эти дуги, обходя точку t против часовой стрелки. Обозначим через $a_j(t)$ и $b_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, q$, пределы матриц $a(\tau)$ и $b(\tau)$ при $\tau\to t$ по j-й дуге. Полагаем $\lambda_j=1$, если j-я дуга направлена от точки t, и $\lambda_j=-1$ в противном случае. Пусть $\theta=\pi-2\pi/p$, $\xi(\mu)\equiv\mu$ при $\theta=0$ и $\xi(\mu)=$

---

* Считаем $U(z_{m+j})=U(z_j)$, $j=1, 2, \ldots, m-1$.

** Здесь оператор S определяется формулой (1), в которой Г заменено на L_Δ.

$=\sin(\theta\mu)\exp[i\theta(\mu-1)]/\sin\theta$ при $\theta\neq 0$, где $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Тогда

$$\det K_0(t,\mu)=\begin{cases}\det\{a_1(t)+\lambda_1[2\xi(\mu)-1]b_1(t)\} & \text{при}\quad \nu=1,\\ \det\|u_{i,j}\|_{i,j=1}^{\nu} & \text{при}\quad \nu>1,\end{cases}\tag{12}$$

где $0\leqslant\mu\leqslant 1$, $u_{i,j}=a_i(t)+(-1)^{i-j}\lambda_i b_i(t)$, $j=i,\ i-1$; $i=2,3,\ldots,\nu$,

$$u_{1,1}=\xi(\mu)[a_1(t)+\lambda_1 b_1(t)],\ u_{1,\nu}=(-1)^{\nu}[\xi(\mu)-1][a_1(t)-\lambda_1 b_1(t)]$$

и $u_{i,j}=0$ для остальных i,j.

Пусть $\Delta\in W_1$, $\Delta=\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}$ и матрица $M_\Delta(t,\mu)$, $t\in Z_\Delta'$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$,— символ оператора M_Δ. Обозначим

$$H(\Delta,\mu)=\det M_\Delta(z_1,\mu),\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.\tag{13}$$

Пусть $\Delta\in W_2$. Полагаем $h=\pi/N$,

$$R_k(\mu)=\frac{[2\xi_N(\mu)-1]\cos kh+i\sin kh}{\cos kh+[2\xi_N(\mu)-1]i\sin kh}E_{nq},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1,\tag{14}$$

где функция $\xi_N(\mu)$ получается из $\xi(\mu)$ при $\theta=\pi-2\pi/(Np)$. Обозначим

$$H(\Delta,\mu)=\det\left\{A(0)+\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[B(0)\Psi_k+C(0)\Omega_k]R_k(\mu)\right\},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.\tag{15}$$

Теорема 4. *Оператор* (2) *нётеров тогда и только тогда, когда*

$$\det K_0(t,\mu)\neq 0,\ H(\Delta,\mu)\neq 0,\ t\in\Gamma\setminus\Phi,\ \Delta\in W,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1.\tag{16}$$

При выполнении условий (16)

$$2\pi\,\mathrm{Ind}\,K=$$

$$=\sum_{r=1}^{r_0}\left\{\arg\frac{\det d_-(t)}{\det d_+(t)}\right\}_{t\in\Gamma_r}-\sum_{t\in\Gamma\setminus\Phi}\{\arg\det K_0(t,\mu)\}_{\mu=0}^{1}-\sum_{\Delta\in W}\{\arg H(\Delta,\mu)\}_{\mu=0}^{1}.$$

Функции $H(\Delta,\mu)$, $\Delta\in W$, существенно зависят от предельных значений коэффициента $c(t)$ в точках γ-комплексов, и, следовательно, оператор D влияет на нётеровскую теорию оператора (10).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за помощь и внимание.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
4 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Г. Гордадзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 37, 3, 521 (1965). [2] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973. [3] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, 4, 940 (1971). [4] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 64, 1, 21 (1971). [5] *Х. Л. Смолицкий*, УМН, т. 12, 4 (76), 349 (1957). [6] *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук*, УМН, т. 23, 3 (141), 67 (1968). [7] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Матем. исслед., Кишинев, т. 5, 3, 46 (1970).