Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 519.4 ***МАТЕМАТИКА***

А. И. ЛОГИНОВ, В. С. ШУЛЬМАН

О РЕДУКТИВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБРАХ И ПРОБЛЕМЕ ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком С. М. Никольским 13 XI 1973)

Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве H. Для любого семейства $S \subset B(H)$ назовем решеткой S и обозначим $\operatorname{lat} S$ совокупность всех замкнутых S-инвариантных подпространств пространства H. Семейство S назовем редуктивным, если $M^\perp \in \operatorname{lat} S$ для любого $M \in \operatorname{lat} S$. Очевидно, если R — симметричная (т. е. замкнутая относительно операторного сопряжения) подалгебра алгебры $B(H)$, то она редуктивна. Обращение этого утверждения при дополнительном предположении слабой замкнутости R представляет хорошо известную нерешенную проблему. Отметим, что она не решена полностью даже в частном случае транзитивной алгебры (проблема Бернсайда), т. е. алгебры с тривиальной решеткой инвариантных подпространств, состоящей из двух подпространств (0) и H. Известны лишь частичные решения этих проблем. Арвезон [1] доказал, что всякая транзитивная алгебра, содержащая m.a.s.a. (максимальная абелева симметричная алгебра), совпадает с $B(H)$. Дуглас и Пирси [2] обобщили это утверждение на случай m.a.s.a произвольной конечной кратности. Обобщение этих результатов на случай произвольной редуктивной алгебры получено в работах Шульмана [3], Раджави и Розенталя [4] и Гувера [5]. Другие частные случаи рассматривались в работах [1, 6, 8, 9]. Отметим, что весьма важную роль в доказательстве утверждений цитированных выше работ [1–5] играет существование гиперинвариантных подпространств (т. е. инвариантных относительно коммутанта) у нормальных [10] и n-нормальных [7] нескалярных операторов.

Недавно В. И. Ломоносовым [11] был получен следующий сильнейший результат: всякая транзитивная алгебра (не обязательно замкнутая), содержащая ненулевой компактный оператор, содержит компактный оператор с ненулевым спектром. В качестве следствия отсюда получается утверждение, дающее, в частности, положительный ответ на долгое время остававшийся открытым вопрос о существовании нетривиальных подпространств, инвариантных относительно семейства коммутирующих компактных операторов: всякий нескалярный оператор, коммутирующий с ненулевым компактным, имеет нетривиальное гиперинвариантное подпространство. Другое следствие из теоремы Ломоносова дает еще один частный случай положительного решения проблемы Бернсайда: всякая слабо замкнутая транзитивная алгебра, содержащая ненулевой компактный оператор, равна $B(H)$. Частные случаи этого утверждения были получены ранее в работах [12] и [13]. В настоящей заметке мы покажем, что аналог этого утверждения сохраняет силу и для редуктивных алгебр. Именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Всякая редуктивная слабо замкнутая алгебра есть прямая сумма W^*-алгебры типа I с дискретным центром и конечным коммутантом (т. е. прямая сумма факторов типа I_n, $n < \infty$) и редуктивной алгебры, не содержащей ненулевых компактных операторов.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Пусть R — редуктивная алгебра, содержащая ненулевой компактный оператор K.*

Тогда $\operatorname{lat} R$ *имеет минимальный элемент H_0 такой, что $K|_{H_0} \neq 0$.*

Лемма 2. *Пусть R — равномерно замкнутая редуктивная алгебра, содержащая ненулевой компактный оператор.*

Тогда R содержит конечномерный проектор (не обязательно ортогональный).

Лемма 3. *Пусть R — слабо замкнутая редуктивная алгебра, содержащая ненулевой компактный оператор.*

Тогда существует ненулевой ортопроектор $p \in R \cap R'$ такой, что $R|_{pH}$ — фактор типа I_n, $n < \infty$.

Из теоремы 1 легко получаются такие следствия.

Следствие 1. *Редуктивная слабо замкнутая алгебра, содержащая компактный оператор с нулевым ядром или плотным образом, симметрична.*

Заметим, что теорема 1 остается верной и при замене условия слабой замкнутости алгебры R на менее жесткое условие ультраслабой замкнутости. Поэтому справедливо

Следствие 2. *Редуктивная равномерно замкнутая алгебра компактных операторов симметрична.*

Известная проблема инвариантного подпространства гласит: верно или нет, что всякий ограниченный оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство? Недавно Дайер, Педерсен и Порселли ([14]) показали, что всякий редуктивный оператор можно разложить в прямой интеграл с почти всюду транзитивными компонентами. Это дает новую эквивалентную формулировку предыдущей проблемы: верно или нет, что всякий редуктивный оператор нормален? Положительный ответ на этот вопрос получен для компактных ([15]) и полиномиально компактных операторов ([16]). Кроме того из результата Гувера ([7]) легко следует, что всякий редуктивный n-нормальный оператор нормален. Заметим, что условие редуктивности не является характеристическим для класса нормальных операторов: легко привести пример нормального нередуктивного оператора. С другой стороны, по теореме Фаглида ([10]) условие нормальности оператора эквивалентно условию симметричности его коммутанта. Поэтому более естественным условием в терминах инвариантных подпространств, характеризующим нормальные операторы, является условие гиперредуктивности. Назовем семейство $S \subset B(H)$ гиперредуктивным, если редуктивен его коммутант S'. Однако такая постановка вопроса является более сильной, как показывает следующая

Теорема 2. *Всякое коммутативное редуктивное семейство гиперредуктивно; в частности, всякий редуктивный оператор гиперредуктивен.*

Тем не менее из недавнего результата Гувера ([5]) вытекает нормальность всякого гиперредуктивного n-нормального оператора. Кроме того из теорем 1 и 2 вытекают следующие утверждения:

Следствие 3. *Если R — коммутативная гиперредуктивная (или редуктивная) слабо замкнутая алгебра и R' содержит компактный оператор с нулевым ядром или плотным образом, то R симметрична.*

Следствие 4. *Пусть A — оператор, коммутирующий с компактным оператором, имеющим нулевое ядро или плотный образ. Тогда:*

1) *A нормален тогда и только тогда, когда он гиперредуктивен,*

2) *если A редуктивен, то он нормален.*

Отсюда легко получается следующий известный результат Розенталя ([16]):

Следствие 5. *Всякий полиномиально компактный редуктивный оператор нормален.*

Далее, из результатов работы ([17]) и теоремы 2 вытекает

Следствие 6. *Редуктивный оператор, квазиподобный нормальному, нормален.*

Авторы выражают благодарность М. А. Наймарку и Э. В. Киссину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступило
19 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. Arveson,* Duke Math. J., v. 34, 635 (1967). [2] *R. Douglas, C. Pearcy,* Mich. Math. J., v. 19, № 1, 1 (1972). [3] *B. C. Шульман,* Матем. сборн., т. 87 (129), № 2, 179 (1972). [4] *H. Radjavi. P. Rosenthal,* Indiana Univ. Math. J., v. 20, № 10, 935 (1971). [5] *T. Hoover,* Indiana Univ. Math. J., v. 22, № 11, 1029 (1973). [6] *T. Hoover,* Pacific J. Math., v. 44, № 1 (1973). [7] *T. Hoover,* Acta Sci. Math. (Szeged), v. 32, 109 (1971). [8] *E. Nordgren,* J. Math. Anal. Appl., v. 32, 639 (1970). [9] *А. И. Логинов, В. С. Шульман,* ДАН, т. 212, № 4, 810 (1973). [10] *B. Fuglede,* Proc. Am. Math. Soc., v. 36, 35 (1950). [11] *В. И. Ломоносов,* Функц. анализ. т. 7, в. 3, 55 (1973). [12] *E. Nordgren, H. Radjavi, P. Rosenthal,* Acta Sci. Math. (Szeged), v. 30, 175 (1969). [13] *B. Barnes,* Mich. Math. J., v. 19, № 2, 149 (1972). [14] *J. Dyer, E. Pedersen, P. Porcelli,* Bull. Am. Math. Soc., v. 78, 6, 1020 (1972). [15] *T. Ando,* Arch. Math., v. 14, 337 (1963). [16] *P. Rosenthal,* Proc. Am. Math. Soc., v. 19. 826 (1968). [17] *B. C. Шульман,* ДАН, т. 210, № 3, 543 (1973).