Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.949 *МАТЕМАТИКА*

Академик Г. И. МАРЧУК, В. В. ШАЙДУРОВ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В статье реализуется метод экстраполяции Ричардсона для эволюционной задачи. Теоретическое обоснование этого метода для некоторых уравнений эллиптического типа имеется в работах Е. А. Волкова (например, в ([4])).

В гильбертовом пространстве X с нормой элементов $\|x\|=(x, x)^{1/2}$ рассматриваются функции одного вещественного переменного $t\in[0, T]$. Будем говорить, что функция со значениями в X принадлежит классу C^k, если для нее существует k-я непрерывная производная (см. ([2])).

Рассмотрим дифференциальную задачу

$$\partial u/\partial t+Au=f,\quad t\in(0, T),\quad u(0)=u_0, \tag{1}$$

где A: $X\to X$ — линейный, ограниченный равномерно на $[0, T]$ оператор, положительно полуопределенный в смысле скалярного произведения X: $(Ax, x)\geqslant 0$ для всех $x\in X$. Пусть оператор A представим в виде суммы $A(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i(t)$, где A_i: $X\to X$ — линейные ограниченные равномерно на $[0, T]$ положительно полуопределенные операторы. Для численного решения задачи (1) рассмотрим неявную схему расщепления

$$\begin{gathered}(I+\tau A_1(t))u^\tau\left(t-\tau\frac{n-1}{n}\right)=u^\tau(t-\tau)+\tau f(t),\\ (I+\tau A_2(t))u^\tau\left(t-\tau\frac{n-2}{n}\right)=u^\tau\left(t-\tau\frac{n-1}{n}\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I+\tau A_n(t))u^\tau(t)=u^\tau\left(t-\tau\frac{1}{n}\right),\\ t\in\omega_\tau\end{gathered} \tag{2}$$

и

$$u^\tau(0)=u_0$$

где ω_τ — равномерное с шагом $\tau=T/M$ разбиение отрезка $(0, T]$: $\omega_\tau=\{t:\ t=j\tau,\ j=1,\ldots,M\}$, I — тождественный оператор. Из ([1]) следует устойчивость этой схемы:

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|u^\tau(t)\|\leqslant\|u_0\|+T\max_{t\in\omega_\tau}\|f(t)\|.$$

Отметим, что положительная полуопределенность A_i привлекается лишь для получения устойчивости. От этого требования в силу ограниченности операторов A_i можно отказаться, накладывая условие на величину шага τ.

Теорема 1. *Пусть $f\in C^s$, а $A(t)$ обладает такой гладкостью по t (см. ([2])), что для любой правой части $f\in C^k$, $0\leqslant k\leqslant s$, и $u_0\in X$ задача* (1) *однозначно разрешима в C^{k+1}.*

Тогда найдутся такие не зависящие от τ функции $v_j \in C^{s-j+1}$, что для решения дискретной задачи (2) *при всех целых $M>0$ и $\tau=T/M$ справедливо разложение*

$$u^\tau(t)=u(t)+\sum_{j=1}^{s-1}\tau^j v_j(t)+\tau^s\xi_\tau(t), \quad t\in\omega_\tau, \tag{3}$$

с ограниченной дискретной функцией ξ_τ: $\max\limits_{t\in\omega_\tau}\|\xi_\tau(t)\|\leqslant c$, где константа c зависит лишь от норм производных функции f, но не зависит от τ.

Доказательство этой теоремы может быть построено следующим образом. Предположим сначала существование разложения (3).

Зафиксируем какое-либо $t\in\omega_\tau$. Исключим из (2) $u^\tau(t)$ и $u^\tau(t-\tau)$, используя соотношение (3), причем в соотношении для $u^\tau(t-\tau)$ с помощью формулы Тейлора выразим все значения функций в точке $t-\tau$ через значения функций и их производных в точке t. Приравнивая теперь коэффициенты при различных степенях τ, получим дискретные системы

$$\partial v_j/\partial t+Av_j=f_j, \quad t\in\omega_\tau, \quad v_j(0)=0; \tag{4}$$

причем в f_j участвуют выражения, включающие лишь $u, v_1, \ldots, v_{i-1}$. При замене дискретной области аргумента ω_τ на $(0, T)$ получаются задачи, из которых функции v_j могут быть найдены рекуррентным образом. Гладкость этих функций следует из предположения теоремы относительно свойств оператора A, а независимость от τ следует из вида дифференциальных уравнений и их правых частей.

Считая теперь v_j заданными функциями, определим ξ_τ так, чтобы выполнялось (3). Тогда при подстановке u_τ в (2) из способа отыскания функций v_j следует соотношение

$$\prod_{i=1}^{n}(I+\tau A_i(t))\,\xi_\tau(t)=\xi_\tau(t-\tau)+\tau f_\tau(t), \quad t\in\omega_\tau, \quad \xi_\tau(0)=0. \tag{5}$$

Из устойчивости этой системы и вида функции f_τ, являющейся комбинацией производных функций u, v_j и произведений операторов A_i на них, следует требуемая оценка для ξ_τ.

На основании полученного разложения справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *путем решения s задач с различными шагами τ_k можно найти решение задачи* (1) *с точностью $O(\tau^s)$, $\tau=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\tau_k$.*

Доказательство. В случае, если точка t, в которой отыскивается решение, является общей для всех равномерных сеток, решение повышенной точности строится по формуле

$$\bar{u}(t)=\sum_{k=1}^{s}\gamma_k u^{\tau_k}(t);$$

здесь u^{τ_k} — решения задач (2) при s различных шагах τ_k, а γ_k выбираются так, чтобы обратить в нуль коэффициенты при каждой функции v_j в получаемом решении. Это достигается выбором γ_k из системы

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{s}\gamma_k=1,\\ \sum_{k=1}^{s}\gamma_k\tau_k^l=0, \quad l=1,\ldots,s-1.\end{gathered} \tag{6}$$

В этом случае на основании (3) имеется оценка

$$\|\bar{u}(t)-u(t)\|\leqslant c,$$

где c — константа из условия теоремы 1. Разрешая систему (6) по методу Крамера, можно получить соотношения для γ_k, используя определители Вандермонда ([3]). Из этих соотношений следует, что при соблюдении условия $\tau_k/\tau_{k+1}\geqslant c_1>1$, $k=1,\ldots,s-1$, для γ_k вытекает оценка

$$|\gamma_k|\leqslant\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)^s,\quad k=1,\ldots,s.$$

В случае, когда t не является точкой, общей для всех сеток, следует применить интерполяцию. Гладкость функций u и v_j позволяет утверждать, что при интерполяции по Лагранжу в точку t из s соседних узлов дискретной сетки ω_{τ_k}, разложение (3) в точке t получается с теми же самыми функциями v_j. Изменится лишь константа c в оценке функций ξ_{τ_k}, куда войдут дополнительно оценки производных u, v_j и веса интерполяционной формулы. После того, как интерполяцией с каждой сетки получены s разложений (3) в точке t, метод решения не отличается от указанного выше.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. И. Марчук,* Методы вычислительной математики, «Наука», 1973. [2] *А. Картан,* Дифференциальное исчисление, Дифференциальные формы, М., 1971. [3] *Р. Беллман,* Введение в теорию матриц, «Наука», 1969. [4] *Е. А. Волков,* Дифференциальные уравнения, т. 1, № 7, 946 (1955).