Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 51.01;519.48

МАТЕМАТИКА

В. Ю. МЕЙТУС, К. П. ВЕРШИНИН

О НЕКОТОРЫХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ПРОБЛЕМАХ В ВЫЧИСЛИМЫХ КАТЕГОРИЯХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 25 IX 1973)

1. Настоящая заметка посвящена определению понятий вычислимой категории и вычислимого функтора и формулировке некоторых результатов, связанных с этими понятиями. Определения алгебраических категорий и функторов предполагаются известными. В работе использованы некоторые результаты работ ([1-3]).

2. Пусть $\mathscr{C}$ — алгебраическая категория, объектами которой являются множества, морфизмами — отображения множеств; обозначим через $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ ее множество объектов. Для каждой пары объектов A, $B\in\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ через $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(A, B)$ обозначим множество морфизмов из A в B, а для каждой тройки A, B, C через $\varphi(A, B, C)$ — отображение $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(A, B)\times\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(B, C)\to\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(A, C)$. Функция $\varphi(A, B, C)$ удовлетворяет очевидному соотношению, выражающему условие ассоциативности морфизмов, и называется мультипликативной функцией категории $\mathscr{C}$.

3. Пусть N — множество натуральных чисел. Нумерацией β множества X называется однозначное отображение множества N на X. Если $\beta n=x$, то n называется β-номером элемента x. Если $Y\subset X$, то ограничение β на Y определяет однозначное отображение подмножества $N_Y\subset N$ на Y; множество N_Y называется номерным множеством нумерации β, ограниченной на подмножество Y.

Нумерация β множества Y называется вычислимой (рекурсивной), если множество N_Y рекурсивно-перечислимо (рекурсивно).

Определим для категории $\mathscr{C}$ следующие нумерации: для множества $A_{\mathscr{C}}$ — нумерацию α; для каждого $A=\alpha m$ — нумерацию его элементов α_m, а для каждой пары объектов $A=\alpha m$, $B=\alpha n$ — нумерацию $\xi_{m,n}$ множества $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Тождественному морфизму всегда приписывается номер ноль, т. е. $\xi_{m,m}(0)=1_{\alpha m}$.

Алгебраическая категория $\mathscr{C}$, для которой заданы нумерации α, α_m, $\xi_{m,n}$, называется нумерованной категорией, а любая ее подкатегория с соответствующим ограничением нумераций α, α_m, $\xi_{m,n}$ — нумерованной подкатегорией.

4. Морфизм $z\in\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(\alpha m, \alpha n)$ называется вычислимым морфизмом, если существует такая рекурсивная функция f_z: $N\to N$, что для любого k выполняется равенство $z(\alpha_m k)=\alpha_n f_z(k)$. Пусть $\mathscr{C}'$ — подкатегория нумерованной категории $\mathscr{C}$ с вычислимой нумерацией α. Нумерация $\xi_{m,n}$ множества морфизмов $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(A, B)$ категории $\mathscr{C}'$ называется вычислимой, если существует такая рекурсивная функция $\Omega_{mn}(x, y)$, что для всех $z=\xi_{mn}p$ и $\alpha_m i\in A$ справедливо равенство $(\xi_{m,n}p)(\alpha_m i)=\alpha_n\Omega_{m,n}(p, i)$. Мультипликативная функция φ называется вычислимой, если существует рекурсивная функция Φ_φ такая, что $\varphi(A, B, C)(\xi_{m,n}p, \xi_{n,r}q)=\xi_{m,r}\Phi_\varphi(p, q)$. Подкатегория $\mathscr{C}'$ нумерованной категории $\mathscr{C}$, для которой ограничения нумераций α, α_m, $\xi_{m,n}$ вычислимы и мультипликативная функция φ является вычислимой функцией, называется вычислимой подкатегорией категории $\mathscr{C}$.

5. Пусть $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ — нумерованные категории с нумерациями $(\alpha, \alpha_m, \xi_{m,n})$, $(\beta, \beta_m, \eta_{m,n})$ и мультипликативными вычислимыми функциями φ, ψ соответственно. Функтор F: $\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ называется **ковариантным вычислимым** функтором, если выполнены следующие условия:

а) для отображения F множества объектов $\mathscr{A}_{\mathscr{C}_1}$ в $\mathscr{A}_{\mathscr{C}_2}$ существует вычислимая функция f_F, отображающая N_α в N_{β_2} такая, что $F(\alpha n) = \beta f_F(n)$ для каждого $n \in N_\alpha$;

б) для каждого отображения $F(A, B)$ множества морфизмов $\mathscr{H}_{\mathscr{C}_1}(A, B)$ в $\mathscr{H}_{\mathscr{C}_2}(FA, FB)$ существует вычислимая функция $f_{F,m,n}$: $N_\xi \to N_\eta$ такая, что $F(\alpha m, \alpha n)(\xi_{m,n} p) \neq \eta_{f_F(m) f_F(n)} f_{F,m,n}(p)$, причем если $p=0$, $m=n$, то $\eta_{f_F(m) f_F(n)} f_{F,m,n}(0) = 1_{F(\alpha m)}$, и выполняется следующее равенство: $\eta f_{F,m,r}(\Phi_\varphi(p, q)) = \eta \Phi_\psi(f_{F,m,n}(p), f_{F,n,r}(q))$. Пусть F, G — два вычислимых функтора из категории $\mathscr{C}_1$ в категорию $\mathscr{C}_2$. Предположим, что нумерация морфизмов η категории $\mathscr{C}_2$ вычислима с функцией $\Omega^2_{a,b}(x, y)$.

Функторный морфизм t: $F \to G$ называется **вычислимым** функторным морфизмом, если, во-первых, $t(A)$ — вычислимый морфизм категории $\mathscr{C}_2$ для каждого $A \in \mathscr{A}_{\mathscr{C}_1}$, во-вторых, существует вычислимая функция $T(x)$ по номеру m каждого объекта $A = \alpha m$, вычисляющая номер морфизма t в нумерации η, т. е. $\eta T(m) = t(A) \in \mathscr{H}_{\mathscr{C}_2}(FA, GA)$. В-третьих, для любого объекта $B = \alpha n$, морфизма $z = \xi_{m,n} p$ и каждого элемента $\beta_{fm} j \in F(\alpha m)$ выполняется условие коммутативности

$$\beta_{gn}[\Omega^2_{gm,gn}(g_{m,n}p, \Omega^2_{fm,gm}(T_{m,j}))] = \beta_{gn}[\Omega^2_{fn,gn}(Tn, \Omega^2_{fm,fn}(f_{m,n}p, j))].$$

Аналогично можно определить понятия вычислимой сопряженности двух функторов, вычислимой эквивалентности и вычислимого изоморфизма категорий.

6. Формализация понятия вычислимости для категорий и функторов позволяет доказать ряд результатов, связанных с несуществованием алгоритмов для ряда известных проблем теории категорий.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ — произвольные рекурсивные категории, а F, G — вычислимые функторы из $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$.*

Тогда проблема существования вычислимого функторного морфизма t: $F \to G$ алгоритмически неразрешима.

Теорема 2. *Проблема представимости произвольного вычислимого функтора алгоритмически неразрешима.*

Теорема 3. *Для произвольных вычислимых функторов F, G проблема вычислимой сопряженности алгебраически неразрешима.*

Следствие. *Проблема вычислимой эквивалентности и вычислимого изоморфизма произвольных вычислимых категорий алгоритмически неразрешима.*

Теорема 4. *Существуют вычислимые категории, для которых никакая пара вычислимых функторов не является вычислимо сопряженной.*

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
23 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. И. Мальцев*, УМН, т. 16, 3 (1961). [2] *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, т. 1, Новосибирск, 1969. [3] *Ю. Л. Ершов*, Алгебра и логика, т. 10, 3 .(1971).