Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 539.142 *ФИЗИКА*

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

О НЕВОЗМОЖНОСТИ РОТАЦИОННОЙ ПОЛОСЫ В СПЕКТРЕ ЭНЕРГИИ ТЕОРИИ О. БОРА — МОТТЕЛЬСОНА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 16 IV 1973)

1. Теория О. Бора — Моттельсона (О. Б.— М.) ([1]) рассматривает безвихревое коллективное движение, как ядро (его масса) не вращается, а только деформируется, и вращается лишь математическая поверхность ядра (эллипсоид). Такое движение естественно рассматривать в переменных $\alpha_{2\mu}$, однако принято думать, что в случае статически деформированных ядер это не выполнимо и что рассмотрение в переменных β, γ, ϑ_k дает ротационную полосу. Так думают, считая, что из пяти переменных β, γ, ϑ_k только две β и γ — внутренние (деформационные) координаты, а эйлеровы углы ϑ_k описывают «вращение ядра» ([2, 3]), и используя представления механики идеальной жидкости во вращающейся твердой эллипсоидальной оболочке. Это мнение ошибочно. В работах ([4, 5]) показано существенное отличие инерционного движения ядра от движения жидкости в оболочке; показано, что спектр энергии почти эквидистантный и ротационной полосы не получается. Это установлено для частного случая, когда β и γ постоянны, который особенно интересен тем, что в нем ясно видно сходство и отличие от движения жидкости в оболочке. Покажем, что и в общем случае, когда β и γ переменны, спектр эквидистантный и ротационной полосы не получается, ибо это является следствием безвихревого движения. Для получения ротационной полосы надо обобщить теорию О. Б.— М. на вихревое движение ядерного вещества, что сделано в работах ([5, 6]).

В теории О. Б.— М. кинетическая энергия и проекции углового момента $\mathbf{M}$ (на оси инерциальной системы отсчета и на вращающиеся оси поверхности) ядер, сферически симметрических в основном состоянии и статически деформированных, имеют одинаковые выражения как в переменных $\alpha_{2\mu}$, так и в переменных β, γ, ϑ_k, так что различие теории для этих двух типов ядер проявляется только в видах потенциальной энергии. Отличие в способах решения и преимущества инерциальной или вращающейся систем отсчета надо выяснить, обсуждая вид потенциальной энергии.

Для сферически симметрических в основном состоянии ядер потенциальная энергия имеет вид

$$U={}^1/_2C\sum_{\mu}\left|\alpha_{2\mu}\right|^2={}^1/_2C(a_0^2+2a_2^2)={}^1/_2C\beta^2; \qquad (2,1)$$

здесь U сразу задано в обеих системах переменных $\alpha_{2\mu}$ и β, γ, ϑ_k; спектр получается эквидистантный при решении задач в тех и других переменных ([6]), что и должно быть.

Как следует обобщить формулу (2.1) на случай статически деформированных ядер? В феноменологическом рассмотрении четно-четных ядер с большим количеством нуклонов в незаполненной оболочке нецелесообразно разделять ядро на «остов» и «внешние нуклоны», но принято сразу постулировать статическую деформацию β_0, γ_0, относя ее за счет свойств незаполненной оболочки. Тогда после выбора инерциальной системы отсчета однозначно определяются статические деформации $\alpha_{2\mu}^0$, и простым естественным обобщением (2,1) будет формула

$$U={}^1/_2C\sum_\mu|\alpha_{2\mu}-\overset{0}{\alpha}_{2\mu}|^2. \tag{2,2}$$

Однако в феноменологическом подходе принят другой способ задания эффективной потенциальной энергии. Инвариант U задают функцией инвариантов β, γ. Например, Донос и Грейнер [7] принимают

$$U={}^1/_2C_0(a_0-a_0{}^0)^2+C_2(a_2-a_2{}^0)^2,\quad a_0=\beta\cos\gamma,\quad a_2=2^{-1/2}\beta\sin\gamma, \tag{2,3}$$

$a_0{}^0=\beta_0$, $a_2{}^0=0$, предполагая $\gamma_0=0$, т. е. что статически равновесная форма ядра обладает акпальной симметрией. Эту формулу можно записать еще так:

$$U={}^1/_2C_0\{(\beta-\beta_0)^2+\beta[\beta_0+(k-1)\beta]\gamma^2\},\quad k=C_2C_0{}^{-1}. \tag{2,4}$$

Другой вид U, предложенный А. Давыдовым [2]:

$$U={}^1/_2C\{(\beta-\beta_0)^2+k\beta_0\beta(\gamma-\gamma_0)^2\},\quad k=C_\gamma C^{-1}, \tag{2,5}$$

совпадает с (2,4) при $\gamma_0=0$ и $k=1$. Значения $k\neq1$ описывают «эффективную анизотропию» ядра, возможную благодаря свойствам незаполненной оболочки, создающим равновесную форму ядра в виде эллипсоида. Отметим, что ядерному веществу нельзя приписать действительную анизотропию кристалла, ибо тогда три оси поверхности являлись бы осями симметрии кристалла кубической системы, которые должны быть осями 4-го порядка; однако поворот на $\pi/2$ не совмещает эллипсоид поверхности с самим собой. Отметим еще, что эффективная анизотропия (для которой характерно, что C_0 и C_2 — инварианты), введенная на основе теории тела однородной деформации [6], приводит к потенциальной энергии Даноса — Грейнера, при этом оказывается, что для **М** необходимо $\gamma_0=0$.

3. При любом способе задания U как функции β, γ ее можно выразить через один только $\alpha_{2\mu}$, ибо β, γ — это инварианты из компонентов тензора $\alpha_{2\mu}$, явно через них выражаемые. Таким образом, U всегда имеет вид $U=CW(\alpha_{2\mu})$ — функции, которая имеет минимум в точке $\alpha2_\mu{}^0$, и, следовательно, может быть разложена в ряд Тейлора вида

$$UC^{-1}=W={}^1/_2C_{ik}\xi_i\xi_k+\Delta W,\quad \xi_k=x_k-x_k{}^0, \tag{3,1}$$

где для краткости введены обозначения: $\alpha_{2\mu}=\alpha_{2\mu}{}'+i\alpha_{2\mu}{}''$,

$$x_1=\alpha_{22}{}',\quad x_2=-2^{-1/2}\alpha_{20},\quad x_3=-\alpha_{22}{}'',\quad x_4=\alpha_{21}{}'\ \ x_5=-\alpha_{21}{}''. \tag{3.2}$$

Разложение (3,1) является обобщением формулы (2,2) на случай эффективной анизотропии и ангармоничности ΔW. Направив оси инерциальной системы отсчета по осям постоянного тензора $\alpha_{2\mu}{}^0$, получим

$$x_1{}^0=2^{-1/2}\beta_0\sin\gamma_0,\quad x_2{}^0=-2^{-1/2}\beta_0\cos\gamma_0,\quad x_3{}^0=x_4{}^0=x_5{}^0=0. \tag{3,3}$$

Кинетическая энергия получает вид $T=B\dot{x}_k\dot{x}_k$, а функция Гамильтона

$$H=H_0+\Delta W=\frac{1}{4B}p_kp_k+{}^1/_2C_{ik}\xi_i\xi_k+\Delta W. \tag{3,4}$$

При решении в первом приближении (т. е. отбрасывая ΔW) в случае, если некоторые $C_{nn}=0$, надо x_n заменить постоянными и в кинетической энергии положить $\dot{x}_n=0$. В классическом решении это означает выбор частного вида начальных условий, а в квантовой теории условие $x_n=\text{const}$ надо заменить приравниванием к нулю соответствующего осцилляторного квантового числа. Так как теория О. Б. — М. справедлива лишь при малых значениях $\alpha_{2\mu}$ — пренебрежении их вторыми степенями сравнительно с единицей,— то H_0 в (3,4) является хорошим приближением функции Гамильтона. Отметим, что при учете высших степеней $\alpha_{2\mu}$ компоненты углового момента деформации не удовлетворяют требуемым перестановочным соотношениям ([2], [6]).

Из (3,4) видно, что спектр энергии эквидистантный, малые отклонения от эквидистантности дает лишь учет по теории возмущения ангармонических членов ΔW. Ротационная полоса отсутствует.

Посмотрим, что дают эти общие формулы для конкретных видов U из п.2. Разложение функций (2,1) и (2,2) в ряд (3,1) дает их же при $\Delta W=0$, т. е. квадратичные члены в (3,1) дают точные функции, что и должно быть. Для разложения функций (2,4) и (2,5) нужны явные выражения инвариантов β, γ через $\alpha_{2\mu}$; они получаются приведением симметричного тензора к диагональной форме, или (что то же) приведением комплексных компонентов $\alpha_{2\mu}$ к вещественным a_ν:

$$\beta^2=2x_kx_k; \quad \cos 3\gamma={}^1/{}_2 6^{3/2}\left(\frac{15}{\pi}x_kx_k\right)^{-3/2}|\Delta| \quad \Delta=\det \tilde{\varepsilon}_{ik}; \tag{3,5}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\varepsilon}_{11}=\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}(\alpha_{22}'-6^{-1/2}\alpha_{20}),\ \varepsilon_{22}=-\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}(\alpha_{22}'+6^{-1/2}\alpha_{20}),\ \tilde{\varepsilon}_{33}=\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2}\alpha_{20},\\ \tilde{\varepsilon}_{12}=-\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\alpha_{22}'',\quad \tilde{\varepsilon}_{13}=\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\alpha_{21}',\quad \tilde{\varepsilon}_{23}=-\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\alpha_{21}''.\end{gathered} \tag{3,6}$$

Из (3,5) в интервале $-\pi/6<\gamma<\pi/6$ получаем

$$\gamma^2={}^2/{}_9-({}^4/{}_5\pi)^{3/2}\frac{\Delta}{9\beta^3}, \quad \Delta>0. \tag{3,7}$$

Коэффициенты C_{ik} для функций (2,4) и (2,5) имеют вид

$$C_{ik}=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_k}\right)_0=\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\beta}{\partial x_k}\right)_0+k\beta_0^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\right)_0. \tag{3,8}$$

Разложения функции (2,4) вокруг точек $\beta_0=0$ и $\beta_0\neq 0$ различны. При $\beta_0=0$ нет эффективной анизотропии и $k=1$, тогда разложение дает (2,1); при $\beta_0\neq 0$ вычисления дают: $C_{11}=C_{33}=2k$, $C_{22}=2$ и остальные $C_{ik}=0$, так что разложение (3,1) функции Даноса — Грейнера (2,4) имеет вид

$$U=C_0\{{}^1/{}_2(\alpha_{20}-\beta_0)^2+k(\alpha_{22}'^2+\alpha_{22}''^2)\}, \quad \alpha_{21}'=\alpha_{21}''=0. \tag{3,9}$$

Это разложение является точным, т. е. $\Delta W=0$. Общее решение классических уравнений движения при (3,9) имеет вид

$$\begin{gathered}x_n=A_n\cos k\omega_0 t+B_n\sin k\omega_0 t, \quad n=1,\ 3.\\ x_2=x_2^0+A_2\cos\omega_0 t+B_2\sin\omega_0 t, \quad x_4=x_5=0, \quad \omega_0^2=C_0B^{-1}.\end{gathered} \tag{3,10}$$

Полученные отсюда выражения β и γ показывают, что при некотором выборе постоянных A_k, B_k имеется частное решение $\beta=\mathrm{const}$, $\gamma=\mathrm{const}$, рассмотренное в ([4]). Из (3,10) также следует, что частота изменения β и γ, а также величина q — угловой скорости вращения главных осей деформации — имеют порядок величины ω_0. Это делает неосуществимым «адиабатическое приближение», применяемое в ([2]). Нельзя заменить β, γ в T_r на $\beta_{\text{эф}}$, $\gamma_{\text{эф}}$ путем усреднения β и γ по высокочастотным колебаниям, ибо таковых нет.

Разложения в ряд (3,1) функции (2,5) также различны в точках $\beta_0=0$ и $\beta_0\neq 0$, $\gamma_0\neq 0$. В первом случае получается (2,1), а во втором вычисления дают

$$C_{11}=2k+2\gamma_0^2(1-{}^4/{}_3k), \quad C_{22}=2-\gamma_0^2, \quad C_{12}=2\gamma_0(k-1). \tag{3,11}$$

Остальные $C_{ik}=0$. Член $\Delta W\neq0$. Из этого разложения функции (2,5) следует (при отбрасывании ΔW), что вблизи устойчивого равновесия ($\beta_0\neq0$, $\gamma_0\neq0$) происходят гармонические колебания вдоль осей эллипсоида поверхности, которые остаются неподвижными, а это означает, что угловой момент $M=0$. При вычислении (3,11) было использовано (3,7). $\gamma=\pi/6$ — это особый случай (при нем $\Delta=0$), рассмотренный в ([4]). Там найдено частное решение при $\gamma=\pi/6$ и $M\neq0$, однако вычисление таблиц энергии показывает, что спектр остается эквидистантным. При малых деформациях возможности формулы (2.5) меньше, чем формулы (2.4), а при больших — на границе применимости теории О.Б.—М. (и за ней), напротив, формула (2,5) дает более разнообразные значения M, однако ни в каком случае не получается ротационной полосы. Все отклонения от эквидистантности дает только ангармоничность ΔW. Это общее свойство безвихревого движения.

При решении классической задачи, а также уравнения Шредингера в переменных $\alpha_{2\mu}$ и в переменных β, γ, ϑ_k результат должен быть одинаков, и выше показано, что решение в $\alpha_{2\mu}$ дает эквидистантный спектр и не дает ротационной полосы. При решении в переменных β, γ, ϑ_k традиционно ([2]) получают ротационную полосу, используя «адиабатическое приближение», которое, однако, неосуществимо. Оно кажется естественным, если представлять себе медленное вращение ядра при быстрых деформациях; тогда, осредняя β и γ и заменяя их постоянными $\beta_{эф}$, $\gamma_{эф}$, получают ротационную полосу. При безвихревом движении это невозможно и получить точное решение уравнения Шредингера в переменных β, γ, ϑ_k не удается, так как переменные не разделяются, но если приближенно их разделить (например, при $\beta-\beta_0\ll\beta_0$), то спектр получается эквидистантный, как и должно быть.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *О. Бор*, Сборн. Проблемы совр. физики, № 9 (1955); № 1 (1956). [2] *А. С. Давыдов*, Возбужденные состояния атомных ядер, 1967. [3] *М. Престон*, Физика ядра, М., 1964. [4] *В. Г. Невзглядов*, ДАН, т. 202, № 6, 1292 (1972). [5] *В. Г. Невзглядов*, Вест. Ленингр. унив., сер. матем. и мех., № 19, 114 (1967). [6] *В. Г. Невзглядов*, Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру, Владивосток, 1970. [7] *M. Danos, W. Greiner*, Phys. Rev., v. 134, № 213, 284 (1964).