Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 518:517.392

МАТЕМАТИКА

М. Д. РАМАЗАНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VII 1973)

Обозначим $\widetilde{B}$ банахово пространство, получающееся замыканием в некоторой $\widetilde{B}$-норме конечных рядов Фурье вида

$$f(x)=\sum_k f_k e^{2\pi ikx},$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $k=k_1,\ldots,k_n$, $k_j=0,\pm1,+2,\ldots$

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, лежащая внутри единичного куба $Q=\{x\,|\,0\leqslant x_j<1,\ j=1,\ldots,n\}$, $\rho(\Omega,R^n\setminus\Omega)>0$. Пространство $\widetilde{B}(\Omega)$ определяется как множество функций $f(x)$, являющихся ограничениями на Ω некоторых функций $g(x)\in\widetilde{B}$ и снабженных нормой

$$\|f(x)\|_{\widetilde{B}(\Omega)}=\inf\|g(x)\|_{\widetilde{B}},\quad g(x)\in\widetilde{B},\quad g(x)\,|_\Omega=f(x).$$

Сопряженное к B пространство обозначается B^*.

Над пространством $\widetilde{B}(\Omega)$ рассматриваются обобщенные функции вида

$$l_h^\Omega(x)=\chi_\Omega(x)-h^n\sum_{kh\in\Omega}c_k\delta(x-kh),$$

где $\chi_\Omega(x)$ есть 1 в Ω и 0 вне Ω, h — малый положительный параметр. Пусть $\mathscr{H}=\{h\,|\,h\to+0,\ 1/h$ — целые числа$\}$.

Последовательность $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ называется функционалом погрешности. Функционалы погрешности применяются для характеристики качества кубатурной формулы (см. [1]).

Функционал погрешности называется оптимальным (обозначается $\{l_h^{0,\Omega}(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$), если он обладает коэффициентами $c_k=c_k^0(h)$, реализующими при каждом $h\in\mathscr{H}$

$$\min_{\{c_k\}}\Big\|\chi_\Omega(x)-h^n\sum_{kh\in\Omega}c_k\delta(x-kh)\Big\|_{[\widetilde{B}(\Omega)]^*}=I(h).$$

Если $\lim\limits_{h\to0}\|l_h^\Omega(x)\|_{[\widetilde{B}(\Omega)]^*}/I(h)=1$, то $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ называется асимптотически оптимальным функционалом погрешности.

Задача состоит в получении достаточных условий асимптотической оптимальности кубатурных формул. В данной работе мы решаем эту задачу для гильбертовых пространств $\widetilde{B}(\Omega)=\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$. Норма пространства $\widetilde{B}=\widetilde{H}_2^\mu$ определяется равенством

$$\|f(x)\|_{\widetilde{H}_2^\mu}=\Big(\sum_k|f_k\mu(k)|^2\Big)^{1/2}.$$

Опишем функции $\mu(k)$, участвующие в определении рассматриваемых нами $\widetilde{H}_2^\mu$-пространств.

1) Будем считать, что $\mu(k)$ есть значения в целочисленных точках некоторой функции $\mu(\xi)$, определенной на R^n, комплекснозначной, нигде не

обращающейся в нуль, непрерывной, а вне некоторого шара ($|\xi|>R$) бесконечно дифференцируемой.

2) С некоторой положительной постоянной ρ для $|\xi|>R$ и любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_j=0,1,2,\ldots$, выполняются оценки

$$\left|D^\alpha \frac{1}{\mu(\xi)}\right| \leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^{-\rho(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}.$$

3) Существуют постоянные M_1 и M_2, $\frac{1}{2}n<M_1<M_2$, такие, что при $t>R$ и $t\to\infty$ функция $\min\limits_{|\xi|=t}|\mu(\xi)|/(1+t)^{M_1}$ не убывает, а $\min\limits_{|\xi|=t}|\mu(\xi)|/(1+t)^{M_2}$ монотонно стремится к нулю.

4) По направлению одной из координатных осей функция $|\mu(\xi)|$ возрастает не быстрее своих минимальных по сферам $|\xi|=t$ значений. Для определенности при аналитической записи этого условия ниже за требуемое направление примем направление оси Ox_1, т. е. вектор $(1, 0,\ldots,0)$.

Тогда наше условие записывается в виде

$$|\mu(t,0,\ldots 0)|/\min|\mu(\xi)|\leqslant C$$

равномерно по t.

Множество функций, удовлетворяющих условиям 1)—4), обозначим $\mathfrak{M}(M_1, M_2)$.

Определение 1. Функционал погрешности $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ обладает ослабленно регулярным пограничным слоем, если существуют не зависящие от $h\in\mathscr{H}$ постоянные L_1 и L_2 такие, что

$$\sup|c_h(h)|\leqslant L_1,$$

если $\rho(k,h,R^n\setminus\Omega)\geqslant L_2h$, то $c_k=1$.

Класс функционалов, удовлетворяющих этому определению, обозначим $R(L_1,L_2)$.

Пусть пространство $\widetilde{B}=\widetilde{W}_p^m$ задается нормой

$$\|f(x)\|_{\widetilde{W}_p^m}=\left(\int_Q\Big|\sum_k f_k(1+|k|^2)^{m/2}e^{2\pi ikx}\Big|^p dx\right)^{1/p}.$$

Определение 2. Функционал погрешности $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ является оптимальным по порядку над пространством $\widetilde{W}_p^m$, если с некоторой не зависящей от $h\in\mathscr{H}$ постоянной C выполняется оценка

$$\|l_h^\Omega(x)\|_{[\widetilde{W}_p^m]^*}\leqslant Ch^m. \qquad (1)$$

Обозначим класс оптимальных по порядку функционалов $O(m,p)$.

Теорема 1. *Если*

$$\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}\in\bigcup_{1\leqslant p<2}[R(L_1,L_2)\bigcap_{m\in[M_1,M_2]}O(m,p)],$$

то $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ асимптотически оптимален над $\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$ для $\mu\in\mathfrak{M}(M_1, M_2)$.

Теорема 2. *Над пространством $\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$ при $\mu\in\mathfrak{M}(M_1,M_2)$ норма оптимального функционала погрешности имеет вид*

$$\|l_h^{0,\Omega}(x)\|_{[\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)]^*}=|\Omega|^{1/2}\|l_h^1(x)\|_{[\widetilde{H}_2^\mu]^*}(1+o(1)) \quad \textit{при } h\to 0,$$

где

$$l_h^1(x)=\chi_Q(x)-h^n\sum_{kh\in Q}\delta(x-kh).$$

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев,* Лекция по теории кубатурных формул, ч. I, II, Новосибирск, 1964, 1965.