Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 539.3 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН УССР Г. Н. САВИН, Ю. Н. НЕМИШ

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Под возмущениями, следуя работе ([1]), будем понимать отклонения от некоторых условий задачи, допускающей точное решение. Эта идея получила развитие в основном в геометрическом смысле (метод «возмущения формы границы») и распространена на те классы краевых задач, для которых граничные поверхности либо граничные условия мало отличаются от допускающих решение методом разделения переменных.

В настоящей заметке методы теории возмущений распространяются на краевые задачи механики твердых деформируемых тел, механические свойства которых близки к свойствам изотропной однородной линейно-упругой среды.

1. Предположим, что упругие свойства рассматриваемых твердых деформируемых тел таковы, что соотношения между напряжениями σ_{ij} и малыми деформациями ε_{ij} можно представить в форме

$$\sigma_{ij}=2G\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\delta_{ij}\nu}{1-2\nu}\theta+\eta_{ij}\right),\quad i,j=1,2,3; \tag{1,1}$$

здесь $\theta=3\varepsilon_0$ — объемное расширение, δ_{ij} — символ Кронекера, η_{ij} — возмущения, характеризующие отклонения соотношений упругости в виде (1,1) от закона Гука для однородных изотропных линейно-упругих тел с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν.

В случае изотропного наследственно-упругого тела ([2]) возмущения η_{ij} определяются, например, по формуле

$$\eta_{ij}=\int_0^t M(t-\tau)\,\varepsilon_{ij}(\tau)\,d\tau+\frac{\delta_{ij}\nu}{1-2\nu}\int_0^t \Lambda(t-\tau)\,\theta(\tau)\,d\tau, \tag{1,2}$$

при этом под G и ν следует понимать упругие постоянные, соответствующие мгновенной деформации тела; $M(t-\tau)$, $\Lambda(t-\tau)$ — ядра наследственности.

Если для рассматриваемых упругих материалов физически нелинейные соотношения между σ_{ij} и ε_{ij} могут быть выбраны в форме ([3]), то возмущения η_{ij} представимы в виде

$$\eta_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_{2n}\psi_0^{2n}\,\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\varkappa_n\varepsilon_0^{n+1}-\gamma_{2n}\psi_0^{2n}\,\varepsilon_0\right)\right]; \tag{1,3}$$

здесь γ_{2n}, $\varkappa_n$ — постоянные материала, ψ_0 — интенсивность деформаций.

Обобщенный закон Гука для однородного анизотропного тела с одной плоскостью симметрии ([4]) допускает представление в форме (1,1), если

$$2G\eta_{11}=(c_{13}-c_{12})\,\varepsilon_{33}+2C_{16}\varepsilon_{12},\ldots,\qquad G\eta_{23}=(c_{44}-G)\,\varepsilon_{23}+c_{45}\varepsilon_{13}, \tag{1,4}$$

где c_{ij} — тринадцать упругих постоянных, обладающих свойствами $c_{ij}=c_{ji}$, $|c_{ij}|<|(c_{ii}c_{jj})^{1/2}|$, $i\neq j$. Константы G и ν выражаются через c_{ij} или «технические постоянные» (модули упругости E_i и коэффициенты Пуассона ν_{ij}). Так, например, для ортотропной среды имеем

$$\nu=\frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}=\left(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{23}\frac{E_2}{E_3}\right)\left[1+\nu_{12}+\nu_{23}(\nu_{13}-\nu_{23})\frac{E_2}{E_3}\right]^{-1}. \tag{1,5}$$

Заметим, что в частном случае осевой симметрии цилиндрически ортотропного тела более эффективным оказывается метод [5], в основе которого лежит точное решение соответствующей краевой задачи для трансверсально изотропного тела.

Предположим, что имеет место случай слабой неоднородности, при которой коэффициент Пуассона $\nu=\mathrm{const}$, а модуль сдвига $G'=Gf$, где $G=\mathrm{const}$, f — некоторая известная функция координат. Тогда возмущения

$$\eta_{ij}=(f-1)\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\delta_{ij}\nu}{1-2\nu}\theta\right),\quad i,j=1,2,3. \qquad (1,6)$$

Например, при решении конкретных задач используются функции $f=e^{\delta z}$, $f=(1+\delta z)^n$ и др., где δ — некоторый малый параметр, z — безразмерная цилиндрическая координата.

Аналогично можно поступить при рассмотрении деформируемых тел с другими механическими свойствами, если только они незначительно отличаются от свойств изотропного однородного линейно-упругого тела, для которого известно или можно построить точное решение поставленной краевой задачи.

2. Используем основные уравнения и соотношения классической теории упругости [6] в криволинейных ортогональных координатах q_i, $i=1, 2, 3$. Тогда на основании зависимостей (1,1) получаем уравнения равновесия

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\theta}{\partial q_1}-\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3\omega_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(H_2\omega_2)}{\partial q_3}\right]=-X_1-\frac{K_1}{2G}\ \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{(1,2,3)}}; \qquad (2,1)$$

здесь H_i — параметры Ляме, ω_i — компоненты вектора вращения $\boldsymbol{\omega}$, K_i — составляющие вектора объемных сил $\mathbf{K}$,

$$X_1=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3\eta_{11})}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_1H_3\eta_{12})}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2\eta_{13})}{\partial q_3}\right]+$$
$$+\frac{\eta_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\eta_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\eta_{22}}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{\eta_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q}\ \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{(1,2,3)}}. \qquad (2,2)$$

Следовательно, из (2,1) для объемного расширения θ имеем

$$\nabla^2\theta=-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\left(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{K}}{2G}\right), \qquad (2,3)$$

где $\mathbf{X}=\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$, ∇^2 — оператор Лапласа.

Задачу о напряженном состоянии деформируемых тел, упругие свойства которых описываются уравнениями (1,1), рекомендуем решать методом последовательных приближений, т. е. представим искомые величины в виде

$$\{\theta, \omega_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}=\sum_{k=0}^{\infty}\{\theta^{(k)}, \overset{(k)}{\omega_i}, \overset{(k)}{u_i}, \overset{(k)}{\varepsilon_{ij}}, \overset{(k)}{\sigma_{ij}}\}. \qquad (2,4)$$

При этом естественно принять за исходное (нулевое) приближение решение соответствующей краевой задачи для однородной изотропной линейно-упругой среды, для которой $\eta_{ij}=0$ $(X_i=0)$. В результате такого подхода в k-м приближении правые части уравнений (2,1), (2,3) будут известными величинами и будут зависеть от возмущений $\eta_{ij}^{(k-1)}$.

Определив частное решение для объемного расширения $\theta_*^{(k)}$, компоненты $\omega_{i,*}^{(k)}$ находим из уравнений равновесия. Следовательно, поле перемещений $\mathbf{u}_*^{(k)}$ можно отыскать, если известно его расхождение $\operatorname{div}\mathbf{u}_*^{(k)}=\theta_*^k$ и вихрь $\operatorname{rot}\mathbf{u}_*^{(k)}=2\omega_*^{(k)}$. Тогда напряжения $\sigma_{ij,*}^{(k)}$ определяются согласно (1,1), (2,4) из соотношений

$$\overset{(k)}{\sigma}_{ij,*}=2G\left[\overset{(k)}{\varepsilon}_{ij,*}+\frac{\delta_{ij}\nu}{1-2\nu}\overset{(k)}{\theta_{*}}+\overset{(k-1)}{\eta}_{ij}\right],\quad k\geqslant 1. \tag{2,5}$$

Выражения для компонентов $\overset{(k)}{u}_{i,0}$ и $\overset{(k)}{\sigma}_{ij,0}$, соответствующие общему решению задачи, записываем на основании их представлений в случае однородной изотропной линейно-упругой среды.

Краевые условия для k-го приближения при заданных на граничной поверхности S смещениях U_i или усилиях F_i соответственно будут

$$\begin{gathered}\overset{(0)}{u}_{i,0}|_S=U_i,\quad [\overset{(k)}{u}_{i,0}+\overset{(k)}{u}_{i,*}]_S=0,\\ \overset{(0)}{\sigma}_{ij,0}n_j|_S=F_i,\quad [(\overset{(k)}{\sigma}_{ij,0}+\overset{(k)}{\sigma}_{ij,*})n_j]_S=0,\quad k\geqslant 1,\end{gathered} \tag{2,6}$$

где n_j — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S.

Таким образом, краевая задача для упругих тел, поведение которых при малых деформациях описывается соотношениями (1,1), формально сводится к последовательному решению граничных задач для изотропных однородных линейно-упругих тел.

З а м е ч а н и е. Наряду с изложенным методом последовательных приближений во многих случаях достаточно эффективным является метод малого параметра, в качестве которого в каждом конкретном случае можно выбрать величину удовлетворительной степени малости.

3. П р и м е р. Рассмотрим задачу о термонапряженном состоянии сплошной нелинейно-упругой сферы радиуса r_0 под действием температурного поля $T(r)=ar^n$, где $a=\text{const}$ — некоторая известная величина, n — целое положительное число. В этом случае к соотношениям упругости (1,1) необходимо добавить температурные члены $-2G\delta_{ij}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T$, где α — коэффициент линейного теплового расширения. На основании допущений ([3]) возмущения (1,4) возьмем в виде $\eta_{ij}=-g_2\psi_0^2(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_0)$, причем g_2 — безразмерная постоянная материала.

Термонапряженное состояние сферы (в предположении отсутствия внешней нагрузки на ее поверхности) определяется формулами

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{2G}=-2A_1\left[\left(1+\frac{n}{2}\right)r^n-r_0^n\right]+\\ +16g_2n^2\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}9^{m-3}A_m^3\left[\left(1+3^m\frac{n}{2}\right)r^{3^m n}-r_0^{3^m n}\right],\end{gathered} \tag{3,1}$$

где коэффициенты A_m, $m\geqslant 2$, находятся из рекуррентных соотношений

$$A_m=16g_2n^2\frac{1-2\nu}{1-\nu}9^{m-4}A_{m-1}^3,\quad A_1=\frac{\alpha a}{n+3}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}. \tag{3,2}$$

Аналогичный вид имеет выражение для σ_{rr}, если в (3,1) коэффициенты при r принять равными единице. Следовательно, в рассматриваемом случае изложенный метод позволяет получить замкнутое решение.

Институт механики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
7 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. М. Морс, Г. Фешбах,* Методы теоретической физики, т. 2, М., 1960. [2] *Ю. Н. Работнов,* Ползучесть элементов конструкций, «Наука», 1966. [3] *Г. Каудерер,* Нелинейная механика, М., 1961. [4] *С. Г. Лехницкий,* Теория упругости анизотропного тела, М.— Л., 1950. [5] *Ю. Н. Немиш,* Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 5 (1972). [6] *В. В. Новожилов,* Теория упругости, Л., 1958.