Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. А. ЦЫГАНКОВ

ОДНОВРЕМЕННАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ ПО КОНТУРУ И ПО ПЛОЩАДИ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 VIII 1973)

Задача о нахождении условий, «при которых многочлены ортогональны одновременно и по площади области и по контуру», поставлена в работе Е. А. Синева ([1]).

В классе систем многочленов, ортогональных с весовыми функциями специального вида по площади области, ограниченной аналитическим контуром, Е. А. Синев нашел необходимое условие для ортогональности по контуру.

В настоящей статье показано, что для каждой жордановой области существуют системы многочленов, ортогональных одновременно по площади области и по контуру.

Пусть G есть односвязная область, ограниченная жордановой кривой Γ, а функция $w=\varphi(z)$ отображает конформно и однолистно G на область $|w|<1$ при условиях: $w_0=\varphi(z_0)$ и $\varphi'(z_0)>0$, $z=\psi(w)$ — обратная функция.

Упорядочим однородные гармонические многочлены:

$$1,\ y,\ x,\ 2xy,\ x^2-y^2, \ldots, u_n(x,y),\ v_n(x,y), \ldots, \tag{1}$$

где

$$u_n(x,y)=u_n(z)=\operatorname{Im} z^n, \quad v_n(x,y)=v_n(z)=\operatorname{Re} z^n, \quad z=x+iy.$$

Ортогонализируя последовательность (1) относительно скалярных произведений

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma n(z)f(z)g(z)\,ds, \tag{2}$$

где $n(z)$ — весовая функция, а ds — элемент дуги, и

$$\iint_G h(z)f(z)g(z)\,d\sigma, \tag{3}$$

где $h(z)$ — весовая функция, а $d\sigma$ — элемент площади, получим системы ортонормированных гармонических многочленов (с.о.г.м.) ([4], [5]) соответственно

$$\{\alpha_0,\ \alpha_n(z),\ \beta_n(z)\}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

$$\{\theta_0,\ \theta_n(z),\ \eta_n(z)\}, \quad n=1,2,\ldots \tag{5}$$

Теорема 1. *Для того чтобы с.о.г.м.* (4) *была ортогональной на контуре* Γ *с весом* $n(z)=|\varphi'(z)|$, *необходимо и достаточно, чтобы она была ортогональной по площади области* G *с весом* $h(z)=|\varphi'(z)|^2$.

Эта теорема имеет эквивалентный аналог для ортогональных многочленов от комплексной переменной.

Так, если

$$\{P_n(z)\}, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

$$\{K_n(z)\}, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

суть системы многочленов от переменной z, ортонормированных соответственно по контуру Γ и по площади области G ([2], [3]) в смысле скалярных произведений

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} n(z)f(z)\overline{g(z)}\,ds, \qquad \iint_{G} h(z)f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma,$$

то имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы система (6) была ортогональной по контуру Г с весом $n(z)=|\varphi'(z)|$, необходимо и достаточно, чтобы она была ортогональной по площади области G с весом $h(z)=|\varphi'(z)|^2$.*

Доказательство эквивалентности теорем 1 и 2 опирается на следующие утверждения.

Теорема А. *Если с.о.г.м. (4) индуцирована на контуре Г весовой функцией $n(z)=|\varphi'(z)|$, то имеют место равенства*

$$\alpha_n(z)=\sqrt{2}P_{n2}(z), \quad \beta_n(z)=\sqrt{2}P_{n1}(z),$$

в которых гармонические многочлены $P_{n1}(z)$ и $P_{n2}(z)$ суть соответственно действительная и мнимая части многочлена $P_n(z)$ из системы (6), индуцированной на Г тем же весом.

Теорема В. *Если с.о.г.м. (5) индуцирована на области G весовой функцией $h(z)=|\varphi'(z)|^2$, то справедливы равенства*

$$\theta_n(z)=\sqrt{2}K_{n2}(z), \quad \eta_n(z)=\sqrt{2}K_{n1}(z),$$

в которых гармонические многочлены $K_{n1}(z)$ и $K_{n2}(z)$ суть соответственно действительная и мнимая части многочлена $K_n(z)$ из системы (7), индуцированной на G тем же весом.

Теорема А была доказана нами ранее ([4], [5]), теорема В формулируется впервые. Для ее доказательства необходимы следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Для любых гармонических многочленов $\pi_n(z)$ и $\mu_m(z)$ существуют сопряженные им гармонические многочлены $\tilde{\pi}_n(z)$ и $\tilde{\mu}_m(z)$ такие, что имеет место равенство*

$$\iint_{G} \pi_n(z)\tilde{\mu}_m(z)|\varphi'(z)|^2\,d\sigma = -\iint_{G} \tilde{\pi}_n(z)\mu_m(z)|\varphi'(z)|^2\,d\sigma.$$

Лемма 2. *Для каждого гармонического многочлена $\pi_n(z)$ существует сопряженный ему гармонический многочлен $\tilde{\pi}_n(z)$ такой, что имеет место неравенство*

$$\iint_{G} |\tilde{\pi}_n(z)|^2\cdot|\varphi'(z)|^2\,d\sigma \leqslant \iint_{G} |\pi_n(z)|^2\cdot|\varphi'(z)|^2\,d\sigma.$$

Обозначим через $H_2(h, G)$ совокупность функций, аналитических в области G и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_G^2=\iint_{G} h(z)|f(z)|^2\,d\sigma<\infty.$$

Лемма 3. *Если $f(z)$, $g(z)\in H_2(|\varphi'|^2, G)$, причем $u(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$, $\hat{u}(z)=\mathrm{Re}\,g(z)$, $v(z)=\mathrm{Im}\,f(z)$ и $\hat{v}(z)=\mathrm{Im}\,g(z)$, то имеют место равенства*

$$\iint_{G} [u(z)\hat{u}(z)-v(z)\hat{v}(z)]\cdot|\varphi'(z)|^2\,d\sigma =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} [u(z)\hat{u}(z)+v(z)\hat{v}(z)]\cdot|\varphi'(z)|\,ds,$$

$$\iint_{G} [u(z)\hat{v}(z)+v(z)u(z)]\cdot|\varphi'(z)|^2\,d\sigma =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} [u(z)\hat{v}(z)+v(z)\hat{u}(z)]\cdot|\varphi'(z)|\,ds.$$

С помощью леммы 3 легко показать, что сопряженные гармонические многочлены $\tilde{\pi}_n(z)$ и $\tilde{\mu}_m(z)$ в леммах 1 и 2 выбираются по тому же правилу, что и сопряженные многочлены в леммах 1 и 2 из нашей работы ([4]).

Теперь изложим схему доказательства основного результата настоящей статьи — теоремы 1.

Рассмотрим две подпоследовательности последовательности (1):

$$1,\ y,\ 2xy, \ldots,\ u_n(x, y), \ldots, \tag{8}$$

$$1,\ x,\ x^2-y^2, \ldots,\ v_n(x, y), \ldots; \tag{9}$$

ортогонализируя их относительно скалярного произведения (2), получим с.о.г.м.'ы соответственно

$$\{\alpha_0^*,\ \alpha_n^*(z)\}, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$\{\beta_0^*,\ \beta_n^*(z)\}, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Ортогонализируя же последовательности (8) и (9) относительно скалярного произведения (3), получим с.о.г.м.'ы соответственно

$$\{\theta_0^*,\ \theta_n^*(z)\}, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{12}$$

$$\{\eta_0^*,\ \eta_n^*(z)\}, \quad n=1, 2, \ldots \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть с.о.г.м.* (10) (*либо* (11)) *индуцирована на* Γ *весом* $n(z)=|\varphi'(z)|$. *Если для каждого многочлена* $\alpha_n^*(z)$ ($\beta_n^*(z)$) *выбрать в соответствии с условиями леммы* 1 *сопряженный ему гармонический многочлен* $\tilde{\alpha}_n^*(z)$ ($\tilde{\beta}_n^*(z)$), *то последовательность* $\{\tilde{\alpha}_n^*(z)\}$ (*соответственно* $\{\tilde{\beta}_n^*(z)\}$) *будет ортонормированной на* Γ *с тем же весом* $n(z)=|\varphi'(z)|$.

Лемма 5. *Пусть с.о.г.м.* (12) (*либо* (13)) *индуцирована на области* G *весом* $h(z)=|\varphi'(z)|^2$. *Если для каждого многочлена* $\theta_n^*(z)$ ($\eta_n^*(z)$) *выбрать в соответствии с условиями леммы* 1 *сопряженный ему гармонический многочлен* $\tilde{\theta}_n^*(z)$ ($\tilde{\eta}_n^*(z)$), *то последовательность* $\{\tilde{\theta}_n^*(z)\}$ (*соответственно* $\{\tilde{\eta}_n^*(z)\}$) *будет ортонормированной на* G *с тем же весом* $h(z)=|\varphi'(z)|^2$.

Лемма 6. *Весовая функция* $n(z)=|\varphi'(z)|$ *индуцирует на* Γ *с.о.г.м.'ы* (4), (10), (11) *такие, что для многочленов этих систем имеют место соотношения*

$$\alpha_n(z)=\alpha_n^*(z),\ n=0,\ 1,\ 2, \ldots, \quad \beta_n(z)=\beta_n^*(z),\ n=1,\ 2, \ldots$$

Лемма 7. *Весовая функция* $h(z)=|\varphi'(z)|^2$ *индуцирует на* G *с.о.г.м.'ы* (5), (12) *и* (13) *такие, что для многочленов этих систем имеют место соотношения*

$$\theta_n(z)=\theta_n^*(z),\ n=0,\ 1,\ 2, \ldots, \quad \eta_n(z)=\eta_n^*(z),\ n=1,\ 2, \ldots$$

С помощью лемм 4—7 уже нетрудно доказать теорему 1.

Теорема 3. *Если система* (6) *индуцирована на* Γ *весом* $n(z)=|\varphi'(z)|$, *то у каждого многочлена* $P_n(z)=a_n^{(n)} z^n+a_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+ \ldots +a_0^{(n)}$ *этой системы коэффициенты* $a_i^{(n)}$, $i=0,\ 1, \ldots,\ n$, *являются действительными числами.*

Поступило
25 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. А. Синев,* Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 4, 222 (1958). [2] *Т. Сеге,* Ортогональные многочлены, М., 1962. [3] *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев,* Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.— Л., 1964. [4] *А. А. Цыганков,* ДАН, т. 197, № 4, 794 (1971). [5] *А. А. Цыганков,* Многочлены от двух переменных, ортогональные на плоскости кривой, Кондидатская диссертация, Свердловск, 1971.