Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 517.91/94 МАТЕМАТИКА

Ю. П. БОГЛАЕВ

ВЫРОЖДЕНИЕ СТЕПЕНИ РОСТА В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 X 1973)

Рассмотрим следующую задачу

$$\mathfrak{U}_\varepsilon:\quad \ddot{y}=f_\varepsilon(\dot{y},y,t),\quad y(0)=A,\quad y(T)=B, \tag{1}$$

и ей соответствующую

$$\mathfrak{U}_0:\quad \ddot{y}=f_0(\dot{y},y,t),\quad y(0)=A,\quad y(T)=B. \tag{2}$$

Решение $\mathfrak{U}_\varepsilon$ ищется в $C^2[0,T]$.

Предположим, что для фиксированных (y,t,ε) и $|\dot{y}|\to\infty$

$$|f_\varepsilon|=O(|\dot{y}|^\alpha),\quad 0<\alpha\leqslant 2,\quad |f_0|=O(|\dot{y}|^\beta),\quad \beta>2. \tag{3}$$

Соотношение (3) указывает на вырождение степени роста f_ε при $\varepsilon=0$. Известно ([1]), что при выполнении (3) $\mathfrak{U}_0$ неразрешима в $C^2[0,T]$ для произвольных T, A, B. В дальнейшем рассматриваются такие значения T, A, B, при которых $\mathfrak{U}_0$ неразрешима и, следовательно, $\mathfrak{U}_\varepsilon$ — сингулярно возмущенная задача.

Сингулярно возмущенной задачей $\mathfrak{U}_\varepsilon$ на множестве $\mathfrak{M}$ называется такая, что $\mathfrak{U}_0$ неразрешима на $\mathfrak{M}$.

Задачи для уравнений с малым параметром при старшей производной, уравнений с малым запаздыванием нейтрального типа и другие ([2], [3]) являются сингулярно возмущенными. В рассматриваемом классе задач, хотя порядок дифференциального уравнения и не понижается при $\varepsilon=0$, вырождение степени роста приводит к появлению пограничного слоя, характерного для задач с малым параметром при старшей производной.

Введем в рассмотрение область

$$\Omega=\{(\dot{y},y,t,\varepsilon):\ |\dot{y}|<\infty,\ |y|<d,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\},$$

где $d>\max(|A|,|B|)$. Наложим на правую часть (1), (2) следующие ограничения.

Условия E. 1) Пусть f_ε, $f_0\in C^\infty[\Omega]$; для достаточно больших R

$$f_\varepsilon=|\dot{y}|^\beta\frac{[G^\pm(y,t,\varepsilon)+|\dot{y}|^{-\gamma}G_1^\pm(\dot{y},y,t,\varepsilon)]}{[g(y,t,\varepsilon)+(\varepsilon\dot{y}^{\beta-\alpha})^\nu]^{1/\nu}}, \tag{4}$$

где $2\geqslant\alpha>0$, $\beta>2$, γ, $\nu>0$, $|G_1^\pm|<c$ при $|\dot{y}|>R$, значок плюс относится к значениям $\dot{y}>R$, минус — к $\dot{y}<-R$; g, $G^\pm$, $G_1^\pm\in C^\infty[\Omega]$.

2) $g(y,t,\varepsilon)\geqslant k>0$, $\dot{y}^{\nu(\beta-\alpha)}\geqslant 0$ в Ω.

3) $|G^\pm(y,t,\varepsilon)|\geqslant K>0$, $\dot{y}G^\pm\leqslant 0$ в Ω.

Отметим, что конкретный вид (4) представления f_ε скажется лишь на оценках в доказательствах следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия E. Пусть при каждом $\varepsilon\neq 0$ существует решение задачи $\mathfrak{U}_\varepsilon$ — $y(t,\varepsilon)$ такое, что*

$$y(t,\varepsilon)\in C^1[0,T],\quad |y(t,\varepsilon)|<d.$$

Тогда существует решение $\bar y(t)$ задачи

$$\ddot y = f_0(\dot y, y, t), \quad \dot y(0) = \infty, \quad y(T) = B, \tag{5}$$

$\bar y(t) \in C^1[0, T]$ *и имеет место*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t, \varepsilon) = \bar y(t), \quad 0 < t_0(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} t_0(\varepsilon) = 0. \tag{6}$$

$\bar y(t)$ называется вырожденным решением. Область $[0, t_0(\varepsilon)]$ по терминологии ([2]) назовем пограничным слоем. Здесь происходит скачок решения $y(t, \varepsilon)$ на конечную величину, при $\varepsilon\to 0$ равную $(\bar y(0) - A)$ ([4]).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия E. Пусть существует решение* (5) $-\bar y(t)$, $|\bar y(t)| < d$, $\dot{\bar y}(0)[\bar y(0) - A] > 0$.

Тогда для достаточно малого ε существует решение задачи $\mathfrak{U}_\varepsilon - y(t, \varepsilon)$ *и имеет место* (6).

Доказательство теоремы проводится сведением краевой задачи (1) к задаче Коши с сингулярным по ε начальным условием

$$y(0, \varepsilon) = A, \quad \dot y(0, \varepsilon) = \begin{cases} P(\varepsilon)/\varepsilon^{1/(2-\alpha)}, & \alpha \neq 2; \\ \exp(P(\varepsilon)/\varepsilon), & \alpha = 2; \end{cases}$$

$$P(\varepsilon) = P_0 + P_1(\varepsilon), \quad P_1(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где P_0 определяется из соотношений

$$P_0^{2-\alpha} = (2-\alpha)\int_A^{\bar y(0)} G^{\pm}(y, 0, 0)\, dy, \qquad \alpha \neq 2,$$

$$P_0 = -\int_A^{\bar y(0)} G^{\pm}(y, 0, 0)\, dy, \qquad \alpha = 2.$$

Примером задачи $\mathfrak{U}_\varepsilon$ является следующая: $\ddot y = -\dot y^3/(1 + \varepsilon \dot y^2)$, $y(0) = 0$, $y(0{,}01) = 1$. Из теоремы 2 вытекает существование решения $y(t, \varepsilon)$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} y(t, \varepsilon) = 1 - (0{,}02)^{1/2} + (2t)^{1/2}$, $t_0(\varepsilon) \leqslant t \leqslant 0{,}01$. Легко определить $P_0 = 1 - (0{,}02)^{1/2}$.

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР
Черноголовка Ногинского р-на Московской обл.

Поступило
22 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Бернштейн*, УМН, в. 8 (1940). [2] *В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М. В. Федорюк,* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Сборн. Итоги науки. Математический анализ, М., 1967. [3] *В. А. Треногин,* УМН, т. 25, в. 4 (154) (1970). [4] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник,* ДАН, т. 132, № 6 (1960).