УДК 519.876.5:62-192

# ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЁЖНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Л. Мережа**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

# PROBABILITY-ALGEBRAIC SIMULATION OF THE CHARACTERISTICS OF MECHANICAL SYSTEMS RELIABILITY

**E.I. Sukach, D.V. Ratobylskaya, V.L. Mereja**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Рассматривается метод вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющий исследовать надёжность механических систем, учитывающий вероятностную природу накопления повреждений компонентами системы и статистический характер взаимного влияния повреждений в процессе эксплуатации системы.

***Ключевые слова***: *вероятностно-алгебраическое моделирование, надёжность механической системы, алгебра, неопределённость данных, неопределённость операций.*

In the paper the probability-algebraic simulation method allowing investigation the reliability of mechanical systems is considered. The method takes into account the probability nature of the damages accumulated by the system components. It demonstrates the statistical property of damages of the interference while in service systems.

***Keywords***: *probability-algebraic simulation, reliability of mechanical system, algebra, uncertainty of the data, uncertainty of operations.*

### *Введение*

Большую группу методов при решении задач надёжности в различных проблемных областях составляют логико-вероятностные методы (ЛВМ) [1]-[3], сущность которых состоит в описании структуры системы средствами математической логики и определении количественной оценки надёжности системы с использованием теории вероятностей.

Классический логико-вероятностный метод [1] предназначен для исследования характеристик надёжности структурно-сложных систем, которые при описании не сводятся к последовательным, параллельным и древовидным структурам. Общий логико-вероятностный метод использует функционально полный базис логических операций (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание) и позволяет построить как монотонные, так и немонотонные модели объектов большой размерности и высокой структурной сложности [2]. Расширение теоретических положений классического ЛВМ и его практическое применение в области исследования экономических процессов излагается в работе [3]. Общими ограничениями этих методов является:

– рассмотрение двух состояний компонентов системы;

– использование строго определённого множества операторов для определения связей между компонентами системы;

– предположение о независимости состояний компонентов от изменений, происходящих с остальными компонентами и всей системой в целом во времени.

С целью расширения возможностей и области практического применения ЛВМ предлагается метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) сложных систем, позволяющий учесть вероятностный характер состояний компонентов исследуемой сложной системы и стохастический характер их взаимодействия, которые определяют динамическое изменение состояний системы в целом.

Рассмотрение различных операторов, определяющих отношения между компонентами системы, позволяет провести исследование функционально-сложных систем, то есть таких, у которых поведение определяется наличием функциональных связей между компонентами, вероятностно изменяющими своё состояние во времени. К классу таких систем относятся механические системы, которые включают набор компонентов, безотказная работа которых обеспечивает надёжность функционирования системы. В процессе эксплуатации механических систем обнаруживается множество опасных зон, которые подвергаются одной и той же системе нагрузок. В этих зонах начинают накапливаться повреждения, приводящие к нарушению функционирования системы, а в предельном случае – к отказу.

В рамках настоящей статьи излагается содержание основных этапов вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем. Дается теоретическое обоснование метода

ВАЛМ. Возможности метода иллюстрируются на примере вероятностно-алгебраического моделирования характеристик надёжности механической системы.

### *1 Основные этапы вероятностно-алгебраического моделирования*

Метод ВАЛМ основан на решении задачи декомпозиции исследуемой системы, разработке моделей, адекватных структуре и особенностям функционирования выделенных при декомпозиции частей, объединении полученных моделей частей системы и рассчитанных показателей надёжности в общесистемные модель и показатели. Он реализуется выполнением четырёх этапов, которые имеют следующее содержание.

*Этап 1.* Первичное вероятностно-алгебраическое моделирование. На этом этапе осуществляется полная формализованная постановка задачи ВАЛМ, которая включает три взаимосвязанных части.

1. На основе выделенной совокупности элементарных компонентов системы $K=\{K_i\}$ и функциональных отношений между ними $F=\{F_j\}$ разрабатывается графическая схема $G(F,K)$ исследуемой системы. Здесь $F$ обозначает множество вершин (детерминированные/вероятностные, бинарные/$n$-арные функции [4]), определяющих связи между компонентами системы, $K$ – множество рёбер, соответствующих компонентам и промежуточным результатам моделирования. Графическая схема представляет собой аналитически точное и строго формализованное отображение знаний о том, какие компоненты включает система и какие отношения между ними возникают в процессе её функционирования.

2. На основе анализа эмпирических данных определяются параметры матриц переходов $Q_i$, характеризующих процессы накопления повреждений отдельными компонентами. Реализуется первичное вероятностное моделирование, целью которого является определение динамического изменения значений векторов вероятностей

$$P^{it}=(p_1^{it},p_2^{it},...,p_n^{it}),\sum_{j=1}^{n}p_j^i=1,$$

свидетельствующих о надёжности компонентов.

3. С учётом целей исследования задаётся критерий успешности функционирования системы, который определяет допустимые границы изменения контролируемых параметров, определяющих состояния её надёжности.

*Этап 2.* Построение алгебраической модели, определяющей процесс функционирования системы. На этом этапе на основе графической схемы исследуемой системы $G(F,K)$ с использованием множества функций строится композиция элементарных устройств модели, соответствующих выделенным компонентам системы. Композиция элементарных устройств отражает схему взаимодействия компонентов, характеризующих надёжность системы.

Полагаем, что устройство $Y_3$ является композицией устройств $Y_1$ и $Y_2$, $Y_3=Y_1*Y_2$, если задано отображение $F$, однозначно определяющее состояние $S_k$ устройства $Y_3$ по состояниям $S_i$ и $S_j$ исходных устройств $Y_1$ и $Y_2$, где $k=F(i,j)$. При этом отображение $F$ однозначно определяет вероятности состояний результирующего устройства по вероятностям состояний исходных устройств:

$$P_k^3=\sum_{k=F(i,j)}P_i^1\cdot P_j^2.$$

На основе композиции элементарных устройств модели $Z=Y_1*Y_2*...*Y_m$ с учётом введённых функций, отражающих отношения между компонентами системы, определяется последовательность алгебраических преобразований, учитывающая структуру вложенности введённых операций. В символьном виде алгебраическая модель записывается следующим образом:

$$F_1(F_2(Y_1,Y_2,F_3(Y_3,Y_5),...,F_z(Y_{m-1},Y_m)), \quad (1.1)$$

где $F=\{F_j\}, j=\overline{1,z}$ – множество функций, определяющих отношения между устройствами модели $\{Y_i,i=\overline{1,m}\}$. Аргументами функций, описывающих взаимодействие компонентов, являются состояния компонентов, вероятностные значения которых задаются векторами $\{P^i,i=\overline{1,m}\}$. В качестве функций алгебраической модели системы могут быть использованы как детерминированные функции, такие как максимум, минимум, разность, сумма, различные схемы $k/n$ и другие, так и вероятностные функции, позволяющие отразить неопределённость результата взаимодействия компонентов системы.

Построенная в символьном виде алгебраическая модель системы однозначно определяет вектор вероятностей состояний исследуемой системы в целом.

*Этап 3.* Реализация расчётной вероятностной модели системы. На этом этапе осуществляется преобразование алгебраической модели в вероятностную форму, позволяющую непосредственно выполнить расчёты вероятностных показателей надёжности исследуемой системы

$$P^{st}=P(\{P^i,P^j,Z\},i,j=\overline{1,m}).$$

Вероятностная модель реализуется путём последовательной свёртки векторов вероятностей устройств модели с учётом уровня вложенности функций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования. Композиция элементарных устройств модели $Z=Y_i*Y_j$ определяет алгебраическую модель вида $F(Y_i,Y_j)$, вероятностная модель которой позволяет вычислить элементы результирующего вектора вероятностей $P^s$ системы Z по формуле:

$$p_k^s = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} p_i^1 p_j^2 \text{, где } i, j, k = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Коэффициенты $a_{ijk}$ называются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования. Они задаются с учётом функции, определяющей отношения между устройствами и удовлетворяют следующим требованиям:

$$\forall i, j, k \quad a_{ijk} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} = 1. \quad (1.3)$$

Если отношение между устройствами модели определяется детерминированной функцией, то коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ijk} = 1, & если \quad k = F(i, j) \\ a_{ijk} = 0, & если \quad k \neq F(i, j) \end{cases}. \quad (1.4)$$

*Этап 4.* Выполнение расчётов вероятностных характеристик системы. На заключительном этапе с использованием вероятностной расчётной модели вычисляются показатели, необходимые для решения различных задач системного анализа надёжности исследуемых систем. Результаты расчётов могут быть использованы для оценки вероятностных свойств системы, сравнения и выбора вариантов её структуры, проектирования систем, обеспечивающих заданный уровень надёжности.

Таким образом, метод ВАЛМ позволяет решать следующие задачи:

– получать динамические вероятностные характеристики рассматриваемых состояний моделируемой системы;

– оценить применение вероятностных характеристик системы в зависимости от изменения вероятностных характеристик составляющих её компонентов;

– определять вероятностные характеристики одного из элементов системы по известным вероятностным характеристикам остальных компонентов и всей системы;

– выявлять зависимые вероятностные характеристики отдельных компонентов и определять степень их влияния на вероятностные характеристики всей системы;

– определять структуру модели системы, оптимально описывающую имеющиеся экспериментальные данные.

## *2 Теоретическая основа метода вероятностно-алгебраического моделирования*

Операция (*), определённая на множестве векторов $P = \{P^i\}$, порождает алгебру $A^*$, то есть для любых $P^1$ и $P^2$ выполняется $P^3 = P^1 * P^2$ и для операции * справедливы свойства дистрибутивности:

$$P^1 * (\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) = \alpha \cdot P^1 * P^2 + \beta \cdot P^1 * P^3,$$

$$(\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) * P^1 = \alpha \cdot P^2 * P^1 + \beta \cdot P^3 * P^1,$$

где $\alpha$ и $\beta$ – вещественные числа, $P^1, P^2, P^3 \in R^n$.

Алгебра задаётся структурными коэффициентами $a_{ijk}$, для которых выполняются условия (1.3).

Векторы вероятностей $\sigma^1 = (1, 0, ..., 0)$, $\sigma^2 = (0, 1, ..., 0)$, $\sigma^n = (0, 0, ..., 1)$, описывающие детерминированные состояния компонентов, являются базисными элементами алгебры. Произведение базисных векторов $\sigma^i * \sigma^j = \sigma^k$ есть базисный вектор, где $k = F(i, j)$. При этом операция, порождающая алгебру, является детерминированной и задаётся функцией $F(i, j)$. Структурные коэффициенты такой алгебры определяются по формуле (1.4).

Алгебру, которая задаётся структурными коэффициентами $a_{ijk}$, удовлетворяющими условию (1.3), будем называть стохастической, поскольку элементами её представлений являются стохастические матрицы. Структурные коэффициенты стохастической алгебры являются произвольными положительными величинами, удовлетворяющими условию (1.4). При этом умножению базисных векторов соответствует некоторый вектор $P^k \in R^n$, то есть $\sigma^i * \sigma^j = P^k$. На практике это соответствует случаю, когда детерминированные состояния элементарных компонентов приводят к недетерминированному состоянию системы. Алгебра $A^*$, порождённая детерминированной операцией *, является частным случаем стохастической алгебры и имеет следующие свойства.

*Свойство 1.* Если функция $F$ коммутативна, то алгебра $A^*$ является коммутативной, то есть для любых двух её элементов $P^1$ и $P^2$ выполняется $P^1 * P^2 = P^2 * P^1$.

*Свойство 2.* Если функция $F$ ассоциативна, то алгебра $A^*$ является ассоциативной, то есть для любых трёх её элементов $P^1$, $P^2$ и $P^3$ выполняется $P^1 * (P^2 * P^3) = (P^1 * P^2) * P^3$.

*Свойство 3.* Если компоненты векторов $P^1$ и $P^2$ являются положительными и нормированными, то и вектор $P^3 = P^1 * P^2$ также обладает этими свойствами, то есть:

$$\forall k = \overline{1, n} \quad p_k^3 \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} p_k^3 = 1.$$

Общим свойством стохастических алгебр является их связь с цепями Маркова, позволяющая сделать выводы об изменении состояний исследуемых систем с учётом введенных операций и свойств этих операций.

Пусть вектора $P^1$ и $P^2$ определяют соответственно вероятности состояний компонентов $K_1$

и $K_2$, а вектор $P^3$ определяет вероятности состояний системы, включающей компоненты $K_1$ и $K_2$, взаимодействующие в соответствии с операцией *, порождающей стохастическую алгебру $A$*. Тогда, умножение структурных коэффициентов стохастической алгебры $a_{ijk}$ на компоненты вектора $P^1$ даёт матрицу $M_1 = \|m_{1jk}\|$, на компоненты вектора $P^2$ – матрицу $M_2 = \|m_{2jk}\|$, а на компоненты вектора $P^3$ – матрицу $M_3 = \|m_{3ij}\|$, где

$$m_{1jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ijk} p_i^1 ,$$

$$m_{2ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} p_j^2 ,\ m_{3ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} p_k^3 .$$

Очевидно, эти матрицы будут стохастическими, описывающими некоторый случайный процесс, который представляется цепью Маркова. Вид их будет определяться операцией, порождающей алгебру.

*Свойство 4.* Для ассоциативной алгебры $A$*, порождённой операцией *, и любых векторов $P^1, P^2,\ P^3$, которым соответствуют стохастические матрицы $M_1,\ M_2$ и $M_3$, где $P^3 = P^1 * P^2$ выполняется равенство $M_3 = M_1 \cdot M_2$, причём $M_3$ является стохастической матрицей такой же структуры, что и матрицы $M_1$ и $M_2$.

Так, например, стохастические матрицы (представления алгебры), полученные для стохастической алгебры $A\wedge$, порожденной операцией $F(i, j) = \max(i, j)$, имеют вид верхней треугольной матрицы, компоненты которой структурно связаны с вектором вероятностей состояний исходного компонента $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & p_1 + p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & 0 & p_1 + p_2 + p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для алгебры $A\oplus$, порождённой операцией $F(i, j) = \min(i + j - 1, n)$, стохастические матрицы также связаны с вектором вероятностей состояний исходного компонента $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Они имеют вид:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} + p_n \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} + p_{n-1} + p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В том случае, если для стохастической алгебры, структурные коэффициенты которой являются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования, выполняется свойство 4, метод моделирования позволяет решать не только прямые задачи, связанные с определением динамически изменяющихся векторов вероятностей состояний системы по векторам вероятностей состояний исходных компонентов системы, но и обратные задачи, а именно: определения векторов вероятностей состояний компонентов по результирующим данным.

### *3 Пример определения вероятностных характеристик надёжности механической системы*

В соответствии с изложенным методом проведем анализ надежности механической системы, включающей два компонента $K_1$ и $K_2$. В процессе функционирования системы каждый из компонентов подвергается кумулятивным повреждениям, то есть необратимому накоплению механических повреждений. В течение времени эксплуатации системы повреждения начинают накапливаться и постепенно превышают нижнюю границу пределов износа, что неизбежно приводит к уменьшению надёжности компонентов и в конечном итоге к их отказу. Наличие функциональной связи $F_{dif}$ между этими компонентами делает систему сложной и отличает её от простого набора частей.

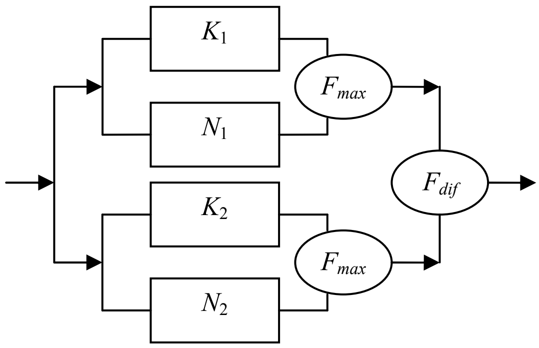


Рисунок 1 – Структурная схема механической системы

Нагрузка, приходящаяся на каждый из компонентов в процессе эксплуатации системы, вероятностно изменяется во времени. На рисунке она представлена элементами $N_1$ и $N_2$. Взаимодействия компонентов системы и элементов нагрузки реализуются функциями $F_{max}$ и определяют изменяющийся режим эксплуатации системы.

Компоненты системы $K_1$ и $K_2$ и элементы, задающие нагрузку, $N_1$ и $N_2$ описываются однотипным образом. Они характеризуются множеством состояний. Вероятностное изменение состояний компонентов и элементов нагрузки описывается марковскими процессами с дискретными состояниями и дискретным временем.

Компоненты описываются множеством состояний $\{S_1,S_2,..,S_{10}\}$, соответствующих определённому уровню износа. Износ компонентов системы является случайным процессом, на который оказывают влияние начальный уровень повреждений, условия внешней среды и вероятностный характер изменений свойств материала компонента. Вероятности перехода компонентов из состояния в состояние задаются матрицами переходов $QK_i$ [10x10], $i$=1,2.

Элементы нагрузки характеризуют жёсткость нагружения компонентов, которая усиливается по мере накопления повреждений компонентами в процессе повторяющегося цикла их функционирования. Они характеризуются множеством состояний $\{S_1,S_2,..,S_5\}$, описывающих уровень нагрузки. Параметры марковского процесса изменения величины нагрузки задаются матрицами переходов $QN_i$ [5x5], $i$=1,2.

В ходе компьютерного моделирования анализируется эволюция во времени вектора вероятностей состояний износа системы при её циклическом функционировании. Для этого на очередном шаге моделирования ($t$=1,…,100), который соответствует циклу функционирования системы, формируются вероятности состояний компонентов $\|P_i^t\| = \|p_{i1}^t, p_{i2}^t, ..., p_{i10}^t\|$, $i$=1,2, изменяются векторы вероятностей, определяющие нагрузку на компоненты системы $\|P_i^t\| = \|p_{i1}^t, p_{i2}^t, ..., p_{i10}^t\|$, $i$=3,4.

Далее, путём вероятностно-алгебраического умножения векторов вероятностей компонентов на соответствующие вектора вероятностей элементов нагрузки реализуется воздействие изменяющейся нагрузки системы на каждый из компонентов системы. При этом используется функция $F\max = F(i,j) = \max(i,j)$, которая задаёт операцию $\wedge$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\wedge$. Состояния результирующего устройства, представленного композицией компонентов $K_i \wedge N_i, i = 1,2$, определяются различными сочетаниями состояний компонентов и уровней нагрузки.

Наконец, в результате вероятностно-алгебраического умножения преобразованных векторов вероятностей компонентов системы с использованием (1.2), получаем вектор вероятностей состояний износа исследуемой системы. При этом используется функция $F_{dif} = F(i,j) = |i-j|$, которая задаёт операцию $\Theta$ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\Theta$, позволяющие оценить разницу между состояниями износа компонентов исследуемой системы.

При моделировании предполагается, что начальные повреждения компонентов не обнаруживают существенного разброса, поэтому начальные значения векторов $\|P_i^0\| = \|1,0,...,0\|$, $i$=1,2. Начальная нагрузка считается детерминированной, что соответственно отражается в векторах вероятностей $\|P_i^0\| = \|1,0,...,0\|$, $i$=3,4.

Вероятностный характер происходящих изменений в компонентах системы обуславливает вероятностный характер изменений параметров всей системы. Для сохранения приемлемой надёжности всей системы анализируются изменения, происходящие с отдельными компонентами, оценивается их влияние на всю систему, и выдаются рекомендации по замене отказавших компонентов. Кроме этого, вероятностно-алгебраическое моделирование позволяет прогнозировать поведение исследуемых систем для предполагаемых данных.

### *Заключение*

Предложенный метод вероятностно-алгебраического моделирования оперирует вероятностными состояниями компонентов, для их композиции используются произвольные функции, позволяющие отразить при моделировании связи между компонентами, образующими систему. Он имеет алгебраическую основу, позволяющую единым образом описать связи между компонентами. Практическое применение метода при исследовании механических систем позволит оценить изменение вероятностных характеристик системы во времени с учётом управляющих воздействий на каждом шаге моделирования, учесть изменяющийся режим эксплуатации и оценить степень его воздействия на механическую систему в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябинин, И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.

2. *Можаев, А.С.* Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем / А.С. Можаев, В.Н. Громов – СПб. : Изд-во ВИТУ, 2000. – 217 с.

3. *Соложенцев, Е.Д.* Управление риском и эффективностью в экономике. Логико-вероятностный подход / Е.Д. Соложенцев – СПб. : Изд-во СПб ун-та, 2009. – 270 с.

4. *Сукач, Е.И.* Расширение метода логико-вероятностного моделирования сложных систем / Е.И.Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Н. Кулага // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: труды Международной научной школы МА БР – 2009, 7–11 июля, 2009 г. – Санкт-Петербург : ГУАП–2009. – С. 471–476.

*Поступила в редакцию 01.04.10.*