Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 532.516 *ГИДРОМЕХАНИКА*

И. М. ВАСЕНИН, О. Б. СИДОНСКИЙ, Г. Р. ШРАГЕР

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 6 XII 1973)

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости, граница которого частично свободна. Предполагается разностный метод решения задачи о движении вязкой жидкости. На основе записи граничных условий в инвариантах ([1]) разработана устойчивая разностная схема, позволяющая аппроксимировать естественные граничные условия на свободной поверхности.

Физические условия стресса на свободной поверхности вязкой жидкости состоят в равенстве нормального напряжения заданному внешнему давлению и в отсутствии касательного напряжения. В дифференциальной форме эти условия имеют вид

$$-2\mu\ \partial u_n/\partial n+p=p_{\text{н}},\qquad \partial u_n/\partial s+\partial u_s/\partial n=0; \tag{1}$$

здесь n, s — соответственно нормальное и касательное направление к свободной поверхности (рис. 1), u_n, u_s — составляющие вектора скорости, μ — коэффициент вязкости, p — давление, $p_{\text{н}}$ — заданное наружное давление.

Условия (1) записаны в локальной системе координат (n, s), связанной с точкой свободной поверхности (рис. 1). Система координат (n, s) для точек свободной поверхности получается поворотом исходной декартовой системы координат (x, y) на угол, равный углу между осью x и нормалью в соответствующей точке свободной поверхности.

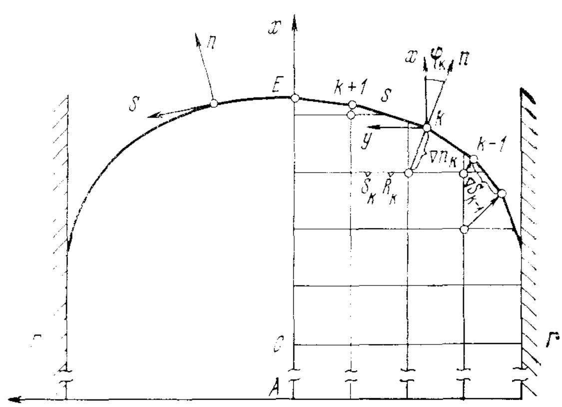

Рис. 1

Метод меченых частиц Харлоу (МАС-метод ([2])) аппроксимирует свободную поверхность вязкой жидкости ступенчатой поверхностью, связанной с эйлеровой сеткой внутри области течения. Недостатком такой аппроксимации является потеря ориентации свободной поверхности, т. е. отсутствие информации о касательном и нормальном направлении на свободной поверхности. Граничные условия стресса (1) основаны на знании этой ориентации поверхности. Пренебрежение естественными физическими условиями стресса на свободной поверхности приводит к потере жидкости на этой поверхности ([3]). Для частичного исправления недостатка МАС-метода в ([3]) предложена аппроксимация свободной поверхности ломаной линией, отдельные звенья которой наклонены под фиксированным углом в 45°. Вариант расчета свободной поверхности, предложенный в ([3]), не исправляет недостатка МАС-метода — потери ориентации свободной поверхности.

В отличие от МАС-метода нами применяется аппроксимация свободной поверхности ломаной линией, наклон которой соответствует ориентации поверхности. Такая аппроксимация свободной поверхности позволяет учесть естественные условия стресса на этой поверхности.

1. Рассмотрим заполнение плоского вертикального канала сильно вязкой несжимаемой жидкостью. Основу математического описания течения образуют уравнения Навье — Стокса. Инерционными членами в этих уравнениях при медленных течениях сильно вязкой жидкости можно пренебречь.

Математическая формулировка задачи о заполнении канала сильно вязкой жидкостью состоит в следующем. Найти в области G с границами Γ, A, E (рис. 1) решение уравнений

$$\rho\, \partial u_x/\partial t = \mu\Delta u_x - \partial p/\partial x - g\rho, \qquad \rho\, \partial u_y/\partial t = \mu\Delta u_y - \partial p/\partial y \tag{2}$$

совместно с уравнением неразрывности

$$\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y = 0, \tag{3}$$

которое на Γ удовлетворяет условиям прилипания

$$u_x = u_y = 0, \tag{4}$$

а на входе в канал A совпадает с решением Пуазейля

$$u_x = a(b^2 - y^2), \qquad u_y = 0; \tag{5}$$

здесь u_x, u_y — составляющие вектора скорости, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести.

Давление p удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta p = 0, \tag{6}$$

которое выводится из уравнения (2) с использованием (3).

Вместо краевой задачи (2)—(5), (1) будем решать краевую задачу (2), (6), (4), (5), (1). Для эквивалентности решения используемой системы уравнений решению исходной системы требуем выполнения уравнения неразрывности на границах, что гарантирует консервативность поля скорости внутри области. На оси симметрии C (рис. 1) используем условия

$$\partial u_x/\partial y = 0, \qquad u_y = 0, \qquad \partial p/\partial y = 0. \tag{7}$$

2. Аппроксимация уравнений (2), (6) производится на прямоугольной сетке внутри области течения, которая нерегулярна в окрестности свободной поверхности.

Дифференциальные уравнения (2), (6) аппроксимируются разностными таким образом, чтобы внутри расчетной области и на границах имел место разностный аналог уравнения неразрывности (3).

Полагая шаг разностной сетки h в обоих направлениях x, y одинаковым, запишем разностные аналоги уравнений на регулярной сетке

$$\begin{aligned} \rho\frac{\Delta_t u_x}{\tau} &= \frac{\mu}{h^2}(\Delta_x\nabla_x + \Delta_y\nabla_y)\,u_x^{n+1} - \frac{\nabla_x p^{n+1}}{h} - g\rho, \\ \rho\frac{\Delta_t u_y}{\tau} &= \frac{\mu}{h^2}(\Delta_x\nabla_x + \Delta_y\nabla_y)\,u_y^{n+1} - \frac{\nabla_y p^{n+1}}{h} \end{aligned} \tag{8}$$

и уравнения Лапласа (6)

$$(\Delta_x\nabla_x + \Delta_y\nabla_y)\,p = 0. \tag{9}$$

Разностные операторы Δ и ∇ имеют вид

$$\Delta_x u_x(x, y) = u_x(x+h, y) - u_x(x, y), \quad \nabla_x u_x(x, y) = u_x(x, y) - u_x(x-h, y),$$

τ — шаг по времени, индекс n связан со временем t формулой $t = n\tau$.

Разностные аналоги условий (7) на C (рис. 1) имеют вид

$$\nabla_y u_x = 0, \qquad \nabla_y p = 0, \qquad u_y = 0. \tag{10}$$

Граничные условия для давления на твердой стенке и на входе находятся из разностных уравнений (8), записанных в приграничных узлах сетки с учетом граничных условий (4), (5) и с использованием разностного аналога уравнения неразрывности. Для решения разностных уравнений (8), (9) применяем итерационные схемы либмановского типа. Поле вектора скорости и давления итерируется одновременно.

3. На свободной поверхности E (рис. 1) в локальной системе координат (n, s) уравнение неразрывности принимает вид

$$\partial u_n/\partial n + \partial u_s/\partial s = 0. \tag{11}$$

Условие отсутствия касательного напряжения (1) совместно с уравнением неразрывности (11) на свободной поверхности будем записывать в форме уравнений в инвариантах

$$\partial S/\partial n + \partial S/\partial s = 0, \quad \partial R/\partial n - \partial R/\partial s = 0, \tag{12}$$
$$S = u_n + u_s, \quad R = u_n - u_s.$$

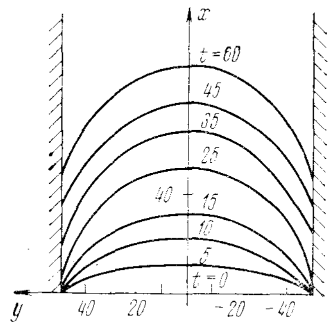

Рис. 2

Аналогичная запись краевых условий в инвариантах для целей последующей разностной аппроксимации предложена Н. Н. Яненко [1] для решения второй краевой задачи теории упругости.

Из каждого узла разностной сетки в окрестности поверхности (рис. 1) проводится нормаль к этой поверхности и в полученных таким образом нормальных точках на свободной поверхности проводится расчет инвариантов. Разностная аппроксимация условий в инвариантах имеет вид

$$\frac{S_k - \check{S}_k}{\nabla n_k} + \frac{S_k - S_{k-1}}{\nabla s_k} = 0, \quad \frac{R_k - \check{R}_k}{\nabla n_k} - \frac{R_{k+1} - R_k}{\nabla s_k} = 0. \tag{13}$$

Индекс k связан с номером рассчитываемой нормальной точки, символом $\vee$ отмечаются величины в узле внутренней сетки, из которого опускается k-я нормаль, ∇n_k, ∇s_k — шаги разностной сетки в направлениях n, s соответственно (рис. 1).

Уравнение для инварианта S устойчиво разрешимо в направлении возрастания индекса k, а для инварианта R — в противоположном направлении, по схеме бегущего счета. Локальная система координат (n, s) поворачивается от точки к точке на свободной поверхности, что приводит к необходимости пересчета S_{k-1}, R_{k+1} в систему координат, связанную с k-й точкой.

Функции S_{k-1} и R_{k+1} при решении уравнений (13) пересчитываются в локальную систему координат (n, s), связанную с точкой k.

После подстановки пересчитанных S_{k-1} и R_{k+1} в (13) получаем уравнения, которые неразрешимы явным образом, так как инварианты S, R в них не разделены. Поэтому для нахождения S и R на свободной поверхности строится итерационный процесс; в нем в качестве начального приближения берутся функции S и R, вычисленные из уравнений (13), в которых пренебрегается поворотом системы координат. По вычисленным инвариантам находятся составляющие вектора скорости u_n и u_s. Используя полученные u_n и u_s, находим u_x и u_y в точках свободной поверхности. С помощью линейной интерполяции получаем значения u_x и u_y в узлах прямоугольной разностной сетки, находящихся на свободной поверхности, необходимые для нахождения u_x и u_y в приграничных узлах сетки.

Применяя разностный аналог первого из условий (1), находим значения давления в точках свободной поверхности по формуле

$$p_k = p_n + 2\mu \frac{(u_n)_k - (u_n)_k}{\nabla n_k}. \quad (14)$$

В узлах прямоугольной разностной сетки, находящихся на свободной поверхности, значения давления вычисляем с помощью интерполяции.

4. Расчет на ЭВМ показал устойчивость вычислительной схемы и быструю сходимость итерационного процесса.

Получив установившееся поле вектора скорости и давления, вычисляем новое положение и форму свободной поверхности через заданный промежуток времени. На рис. 2 показано изменение формы и положения свободной поверхности при заполнении плоского канала вязкой жидкостью. Результаты расчетов показывают, что при движении свободной поверхности вязкой жидкости происходит накатывание поверхности на твердую стенку. Начиная с некоторого момента времени, форма свободной поверхности устанавливается.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
при Томском государственном университете
им. В. В. Куйбышева

Поступило
2 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Яненко,* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», 1967, стр. 116. [2] *F. H. Harlow, S. E. Welch,* Phys. Fluid, v. 8, 12, 2182 (1965). [3] *B. D. Nichols, C. W. Hirt,* Comp. Phys., 434 (1971).