МАТЕМАТИКА

УДК 519.21 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_59
EDN: MFJOOC

НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

С.Ю. Евмененко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INSENSITIVITY OF THE STATIONARY DISTRIBUTION OF OPEN QUEUEING NETWORKS WITH CONTROL QUEUES AND A QUARANTINE NODE

S.Y. Evmenenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. В [1] для данной сети обслуживания были получены условия эргодичности и исследован стационарный режим функционирования сети. Все узлы, в том числе карантинный, предполагаются однолинейными. В настоящей статье доказано, что стационарные распределения как открытой сети обслуживания с контрольными очередями, так и изолированного узла с контрольной очередью инвариантны относительно распределения времени обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: *теория массового обслуживания*, *стохастические процессы*, *теория вероятностей*, *открытые сети обслуживания*, *сети с контрольными очередями*, *сети с карантинным узлом.*

Для цитирования: *Евмененко*, *С.Ю.* Нечувствительность стационарного распределения открытых сетей обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / С.Ю. Евмененко // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_59. – EDN: MFJOOC

Abstract. An open queueing network with control queues and a quarantine node is considered. In [1], ergodicity conditions were derived for this network, and its stationary behavior was analyzed. All nodes, including the quarantine node, are assumed to be single-server. The present article proves that the stationary distributions of both the open queueing network with control queues and an isolated node with a control queue are insensitive to the service time distributions of requests, provided their first moments remain fixed.

Keywords: *queueing theory*, *stochastic processes*, *probability theory*, *open queueing networks*, *networks with control queues*, *networks with a quarantine node.*

For citation: *Evmenenko*, *S.Y.* Insensitivity of the stationary distribution of open queueing networks with control queues and a quarantine node / S.Y. Evmenenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_59 (in Russian). – EDN: MFJOOC

Введение

Теория массового обслуживания является одним из фундаментальных направлений прикладной вероятности и играет ключевую роль в анализе телекоммуникационных, вычислительных, производственных и социальных систем. Классические результаты [2], [3] показали, что для широкого класса сетей массового обслуживания стационарные распределения обладают простой факторизуемой структурой и могут быть найдены в явном виде.

Особый интерес в теории представляет свойство *нечувствительности* (insensitivity) стационарных распределений – инвариантности по отношению к форме распределений времен обслуживания при фиксированных средних. Это свойство существенно упрощает анализ сложных систем, поскольку позволяет игнорировать детали распределений и опираться лишь на их первые моменты.

В ряде работ Гомельской школы по мультипликативным сетям была подробно исследована стохастическая динамика сетей массового обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок в узлах. В частности, в одной из работ был проанализирован стационарный режим функционирования таких сетей и получены условия их эргодичности [4]. В последующих исследованиях для этого же класса моделей было доказано, что стационарное распределение числа заявок в узлах является инвариантным относительно распределений времен обслуживания при фиксированных первых моментах [5]. Кроме того, в рамках исследований Гомельской школы по мультипликативным сетям были получены результаты, касающиеся свойства нечувствительности стационарного распределения для сетей массового обслуживания с обходами узлов заявками [6].

В работе [1] был исследован стационарный режим открытой сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом (все узлы являются однолинейными), а также получены условия эргодичности данной модели. Однако вопрос о нечувствительности стационарного распределения для этой сети оставался открытым.

1 Постановка задачи

В открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных узлов с контрольными очередями и $(N+1)$-го узла, который назовем карантинным. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i-ый узел с контрольной очередью с вероятностью $p_{0,i}$ $\left(\sum_{i=1}^{N} p_{0,i}=1, i=\overline{1,N}\right)$. Каждая заявка, поступающая в i-ый узел с контрольной очередью, присоединяется к контрольной очереди, где проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν_i, ν_i – некоторая положительная постоянная $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Каждая заявка после окончания проверки в i-ом узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$-го узла, а с вероятностью $1-p_i$ присоединяется к очереди стандартных заявок в i-ом узле. Каждая стандартная заявка после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью $p_{i,j}$, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть

$$\left(\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}+p_{i,0}=1, i=\overline{1,N}\right).$$

В $(N+1)$-ом узле, который назовем карантинным, осуществляется восстановление качеств (лечение) нестандартных заявок или их обезвреживание. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла с вероятностью $p_{N+1,j}$, т. е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью $p_{N+1,0}$ обезвреживается, т. е. покидает сеть

$$\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1,j}+p_{N+1,0}=1\right).$$

Стандартные заявки, а также заявки, проходящие «лечение» в карантинном узле, обслуживаются единственным прибором i-го узла $\left(i=\overline{1,N+1}\right)$, времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления, процесса проверки заявок на стандартность и имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, для которой верно равенство

$$\mu_i^{-1}=\int_0^{+\infty}\left[1-B_i(t)\right]dt, i=\overline{1,N+1}, \qquad (1.1)$$

где μ_i – скорость обслуживания заявок i-ым прибором.

Дисциплина обслуживания стандартных заявок, а также заявок, находящихся в карантинном узле, – LCFS PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится в начало обычной очереди на обслуживание, сдвигая стоящие в ней заявки. При повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди каждого узла осуществляется от конца очереди к прибору.

Состояние сети в момент времени t будем описывать вектором

$$\mathbf{x}(t)=\left(\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),...,x_{N+1}(t)\right),$$

где $\mathbf{x}_i(t)=\left(m_i(t),n_i(t)\right)$ – состояние i-го узла с контрольной очередью в момент времени t, $m_i(t)$ – число заявок в контрольной очереди, $n_i(t)$ – число заявок очереди на обслуживание в i-ом узле в момент времени t $\left(i=\overline{1,N}\right)$; $x_{N+1}(t)=n_{N+1}(t)$ – число заявок в карантинном $(N+1)$-ом узле в момент времени t.

Для марковского случая, т. е. когда

$$B_i(t)=1-\exp\{-\mu_i t\}, t>0, i=\overline{1,N+1},$$

процесс $\mathbf{x}(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X=X_1\times X_2\times...\times X_{N+1}$, где

$$X_i=\left\{x_i=\left(m_i,n_i\right):m_i,n_i\geq 0, i=\overline{1,N}\right\},$$

$$X_{N+1}=\left\{x_{N+1}=n_{N+1}:n_{N+1}\geq 0\right\}.$$

Изолируем i-й узел с контрольной очередью от сети $\left(i=\overline{1,N}\right)$, помещая его в фиктивную среду и предполагая, что в него поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Под изолированным узлом будем понимать изолированный от сети узел, в который поступает простейший поток заявок с интенсивностью, равной интенсивности потока заявок, входящих в этот узел сети. Каждая поступающая заявка присоединяется к контрольной очереди, где проверяется экспоненциальным прибором на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром v, v – некоторая положительная постоянная. Дисциплина проверки заявок произвольная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1 - p$ присоединяется к очереди стандартных заявок.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки на стандартность и имеют произвольную функцию распределения $B(t)$, для которой выполняется

$$\mu^{-1} = \int_0^{+\infty} \left[1 - B(t)\right] dt, \qquad (1.2)$$

где μ – скорость облуживания заявок из обычной очереди единственным прибором изолированного узла с контрольной очередью $\left(\mu = \mu_i,\, i = \overline{1, N}\right)$.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом

$$x(t) = \left(m(t), n(t)\right),$$

где $m(t)$ – количество заявок в контрольной очереди в момент времени t, $n(t)$ – количество заявок в обычной очереди в момент времени t. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \left\{x = \left(m, n\right) : m, n \ge 0\right\}$.

Цель настоящей работы – доказать для дисциплины обслуживания LCFS PR инвариантность стационарного распределения числа заявок при фиксированных первых моментах для сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом, а также для изолированного узла с контрольной очередью.

2 Марковский случай

Стационарный режим функционирования данной сети массового обслуживания при $B_i(t) = 1 - \exp\left\{-\mu_i t\right\}$, $t > 0$, $i = \overline{1, N+1}$, был исследован в [1]. Приведем из [1] уравнения глобального равновесия для данной сети массового обслуживания в марковском случае

$$p(\mathbf{x})\left(\lambda + \sum_{i=1}^{N} \mu_i I_{n_i \ne 0} + \mu_{N+1} I_{n_{N+1} \ne 0} + \sum_{i=1}^{N} \nu_i I_{m_i \ne 0}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1\right) \lambda p_{i0} I_{m_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2\right) \mu_i p_{i0} + p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}\right) \mu_{N+1} p_{N+10} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}\right) \nu_i p_i I_{n_{N+1} \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2\right) \nu_i \left(1 - p_i\right) I_{n_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1\right) \mu_j p_{ji} I_{m_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1\right) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{m_i \ne 0},\ \mathbf{x} \in X. \qquad (2.1)$$

Здесь и далее $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор i-го направления.

Разобьем уравнение глобального равновесия (2.3) на уравнения локального равновесия следующим образом

$$\lambda p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2\right) \mu_i p_{i0} +$$
$$+ p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}\right) \mu_{N+1} p_{N+10}; \qquad (2.2)$$

$$p(\mathbf{x})\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i I_{n_i \ne 0} + \mu_{N+1} I_{n_{N+1} \ne 0} + \sum_{i=1}^{N} \nu_i I_{m_i \ne 0}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1\right) \lambda p_{i0} I_{m_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}\right) \nu_i p_i I_{n_{N+1} \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2\right) \nu_i \left(1 - p_i\right) I_{n_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1\right) \mu_j p_{ji} I_{m_i \ne 0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} p\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1\right) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{m_i \ne 0},\ x \in X. \qquad (2.3)$$

Также в [1] исследован стационарный режим работы изолированного узла с контрольной очередью при $B(t) = 1 - \exp\left\{-\mu t\right\}$, $t > 0$. Приведем ниже глобальные уравнения равновесия для такого изолированного узла из [1]

$$p\left(m, n\right)\left[\lambda + \mu I_{n \ne 0} + \nu I_{m \ne 0}\right] =$$
$$= p\left(m - 1, n\right) \lambda I_{m \ne 0} + p\left(m, n + 1\right) \mu + p\left(m + 1, n\right) \nu p +$$
$$+ p\left(m + 1, n - 1\right) \nu \left(1 - p\right) I_{n \ne 0}, \left(m, n\right) \in X. \qquad (2.4)$$

3 Немарковский случай

3.1 *Инвариантность финального распределения изолированного узла с контрольной очередью*

Теперь откажемся от предположения, что времена обслуживания заявок в изолированном узле с контрольной очередью имеют показательное распределение. Однако по-прежнему предполагается независимость процесса поступления заявок, процесса обслуживания единственным прибором изолированного узла заявок из обычной очереди и проверка на стандартность заявок в контрольной очереди. В этом случае процесс, описывающий число заявок в изолированном узле с контрольной очередью в момент времени t, не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема.

***Теорема* 3.1.** *При выполнении условий* (1.2) *и*

$$\frac{\lambda}{\nu} < 1, \; \frac{\lambda(1-p)}{\mu} < 1,$$

случайный процесс, описывающий число заявок в изолированном узле в момент времени t, имеет финальное строго положительное распределение вида

$$p(m,n) = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^m \left(\frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)\left(1-\frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_k(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в изолированном узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, где k – номер позиции, на которой находится заявка от «хвоста» очереди к прибору. Таким образом, $\boldsymbol{\tau}(t) = (\tau_1(t),...,\tau_n(t))$ – вектор, описывающий остаточные времена обслуживания заявок в изолированном узле. Поскольку, вообще говоря, $\mathbf{x}(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\boldsymbol{\zeta}(t) = \{\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)\}$, добавляя к $\mathbf{x}(t)$ непрерывную компоненту $\boldsymbol{\tau}(t)$. Введем обозначение

$$F(m,n,\mathbf{y}) = F(m,n,y_1,...,y_n) = \\ = \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = x, \tau_1(t) < y_1,...,\tau_n(t) < y_n\}.$$

В [1] доказано, что марковский процесс $\mathbf{x}(t)$ при выполнении условий теоремы 1 в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [7] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(m,n,\mathbf{y})$.

Так как $\mathbf{x}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $\mathbf{x}(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\boldsymbol{\zeta}(t)$, так как $\boldsymbol{\zeta}(t)$ получается из $\mathbf{x}(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Пусть h – положительная малая величина. Используя определение полной вероятности, рассмотрим вероятность события

$$P\{\mathbf{x}(t+h) = (m,n), \tau_1(t+h) < y_1,...,\tau_1(t+h) < y_n\};$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени t:

а) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, за время h заявка пришла в контрольную очередь извне (вероятность $\lambda h + o(h)$) и за остаточное время не успела обслужиться в узле (вероятность $B(y_n + \theta_1 h)$); вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m-1,n), \tau_1(t) < y_1,...,\tau_n(t) < y_n\}\times \\ \times(\lambda h + o(h))B(y_n+\theta_1 h)I_{m\neq 0},$$

здесь и далее $0 < \theta_i < 1$;

б) в обычной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, и за время h заявка обслужилась и покинула узел; вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m,n+1), \\ \tau_1(t) < y_1,...,\tau_n(t) < y_n, \tau_{n+1}(t) < h\};$$

в) изолированный узел находился в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, за время h заявки не покидали узел за счет обслуживания (вероятность $B(y_n + \theta_2 h)$) и заявки не переходили в обычную очередь из контрольной (вероятность $1-\nu h + o(h)$); вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m,n), \tau_1(t) < y_1,...,\tau_n(t) < y_n\}\times \\ \times B(y_n+\theta_2 h)(1-\nu h + o(h));$$

г) изолированный узел находился в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, остаточное время обслуживания заявки, находящейся в узле на месте n, было в диапазоне $[h, h+y_n]$, за время h заявки не поступали в узел (вероятность $1-\lambda h + o(h)$); вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m,n), \tau_1(t) < y_1,...,\tau_{n-1}(t) < y_{n-1}, \\ h \le \tau_n(t) < y_n + h\}(1-\lambda h + o(h));$$

д) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, а в обычной очереди на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$; за время h заявка после проверки на стандартность была признана стандартной и перешла в обычную очередь изолированного узла (вероятность $(\nu h + o(h))(1-p)$) и за остаточное время не успела обслужиться в изолированном узле (вероятность $B(y_n+\theta_3 h)$); вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m+1,n-1), \tau_1(t) < y_1,...,\tau_{n-1}(t) < y_{n-1}\}\times \\ \times(\nu h + o(h))(1-p)B(y_n+\theta_3 h)I_{n\neq 0};$$

е) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$, а в обычной очереди было столько же заявок, сколько и в состоянии $\mathbf{x}(t) = (m(t),n(t))$; за время h заявка после проверки на стандартность была признана нестандартной и покинула изолированный узел (вероятность $(\nu h + o(h))$); вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = (m+1,n), \tau_1(t) < y_1,...,\tau_n(t) < y_n\}\times$$

$$\times\left(\nu h+o(h)\right)p;$$

вероятность того, что произойдет не менее двух изменений состояний узла равна $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем

$$P\{\mathbf{x}(t+h)=(m,n),\tau_1(t+h)<y_1,...,\tau_1(t+h)<y_n\}=$$
$$=P\{\mathbf{x}(t)=\left(m-1,n\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_n(t)<y_n\}\times$$
$$\times\left(\lambda h+o(h)\right)B(y_n+\theta_1 h)I_{m\neq0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\left(m,n+1\right),\tau_1(t)<y_1,...$$
$$\ldots,\tau_n(t)<y_n,\tau_{n+1}(t)<h\}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\left(m,n\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_n(t)<y_n\}\times$$
$$\times B(y_n+\theta_2 h)\left(1-\nu h+o(h)\right)+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\left(m,n\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_{n-1}(t)<y_{n-1},$$
$$h\le\tau_n(t)<y_n+h\}\left(1-\lambda h+o(h)\right)+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\left(m+1,n-1\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_{n-1}(t)<y_{n-1}\}\times$$
$$\times\left(\nu h+o(h)\right)(1-p)B(y_n+\theta_3 h)I_{n\neq0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\left(m+1,n\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_n(t)<y_n\}\times$$
$$\times\left(\nu h+o(h)\right)p+o(h);$$

Далее, каждую вероятность выразим через функцию вида

$$F(m,n,t,\mathbf{y})=$$
$$=P\{\mathbf{x}(t)=\left(m,n\right),\tau_1(t)<y_1,...,\tau_n(t)<y_n\}.$$

Получим следующую систему уравнений

$$F\left(m,n,t+h,\mathbf{y}\right)=$$
$$=F\left(m-1,n,t,\mathbf{y}\right)\left(\lambda h+o(h)\right)B(y_n+\theta_1 h)I_{m\neq0}+$$
$$+F\left(m,n+1,t,y_1,...,y_n,h\right)+$$
$$+F\left(m,n,t,y\right)B(y_n+\theta_2 h)\left(1-\nu h+o(h)\right)+$$
$$+\left(F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_n+h\right)-F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_{n-1},h\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\lambda h+o(h)\right)+$$
$$+F\left(m+1,n-1,t,y_1,...,y_{n-1}\right)\left(\nu h+o(h)\right)\times$$
$$\times(1-p)B(y_n+\theta_3 h)I_{n\neq0}+$$
$$+F\left(m+1,n,t,\mathbf{y}\right)\left(\nu h+o(h)\right)p.$$

Рассматривая $F(m,n,t,\mathbf{y})$ как сложные функции от t и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t, y_n и y_{n+1}, запишем разложение этих функций по формуле Тейлора

$$F\left(m,n,t+h,\mathbf{y}\right)=$$
$$=F\left(m,n,t,\mathbf{y}\right)+\frac{\partial F\left(m,n,t,\mathbf{y}\right)}{\partial t}h+o(h);$$
$$F\left(m,n+1,t,y_1,...,y_n,h\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(m,n+1,t,y_1,...,y_n,0\right)}{\partial y_{n+1}}h+o(h);$$
$$B(y_n+\theta_i h)=B(y_n);$$
$$F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_n+h\right)=F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_n\right)+$$
$$+\frac{\partial F\left(m,n,t,y_1,...,y_n\right)}{\partial y_n}h+o(h);$$
$$F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_{n-1},h\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(m,n,t,y_1,...,y_{n-1},0\right)}{\partial y_n}h+o(h),$$

а также, приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на h и устремляя h к нулю, получим

$$\frac{\partial F\left(m,n,t,\mathbf{y}\right)}{\partial t}=F\left(m-1,n,t,\mathbf{y}\right)\lambda B(y_n)I_{m\neq0}+$$
$$+\frac{\partial F\left(m,n+1,t,y_1,...,y_n,0\right)}{\partial y_{n+1}}+$$
$$-F\left(m,n,t,\mathbf{y}\right)B(y_n)\nu I_{m\neq0}-F\left(m,n,t,y_1,\ldots,y_n\right)\lambda+$$
$$+\left(\frac{\partial F\left(m,n,t,y_1,...,y_n\right)}{\partial y_n}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial F\left(m,n,t,y_1,...,y_{n-1},0\right)}{\partial y_n}\right)I_{n\neq0}+$$
$$+F\left(m+1,n-1,t,y_1,...,y_{n-1}\right)\nu(1-p)B(y_n)I_{n\neq0}+$$
$$+F\left(m+1,n,t,\mathbf{y}\right)\nu p.$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$F\left(m,n,\mathbf{y}\right)B(y_n)\nu I_{m\neq0}+F\left(m,n,y_1,\ldots,y_n\right)\lambda+$$
$$+\left(\frac{\partial F\left(m,n,y_1,...,y_{n-1},0\right)}{\partial y_n}-\frac{\partial F\left(m,n,y_1,...,y_n\right)}{\partial y_n}\right)I_{n\neq0}=$$
$$=F\left(m-1,n,\mathbf{y}\right)\lambda B(y_n)I_{m\neq0}+$$
$$+\frac{\partial F\left(m,n+1,y_1,...,y_n,0\right)}{\partial y_{n+1}}+$$
$$+F\left(m+1,n-1,y_1,...,y_{n-1}\right)\nu(1-p)B(y_n)I_{n\neq0}+$$
$$+F\left(m+1,n,\mathbf{y}\right)\nu p. \tag{3.1}$$

Разобьем уравнение глобального равновесия (3.1) на уравнения локального уравнения следующим образом

$$F\left(m,n,y_1,\ldots,y_n\right)\lambda=\frac{\partial F\left(m,n+1,y_1,...,y_n,0\right)}{\partial y_{n+1}}+$$
$$+F\left(m+1,n,\mathbf{y}\right)\nu p; \tag{3.2}$$

$$F\left(m,n,y\right)B(y_n)\nu I_{m\neq0}+$$
$$+\left(\frac{\partial F\left(m,n,y_1,...,y_{n-1},0\right)}{\partial y_n}-\frac{\partial F\left(m,n,y_1,...,y_n\right)}{\partial y_n}\right)I_{n\neq0}=$$
$$=F\left(m-1,n,\mathbf{y}\right)\lambda B(y_n)I_{m\neq0}$$
$$+F\left(m+1,n-1,y_1,...,y_{n-1}\right)\nu(1-p)B(y_n)I_{n\neq0}. \tag{3.3}$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным, абсолютно непрерывным по y решением уравнений локального равновесия (3.2), (3.3), а следовательно, и уравнения глобального равновесия (3.1) является

$$F(n,m,\mathbf{y}) = p(n,m)\prod_{k=1}^{n}\mu\int_0^{y_k}\left[1-B(u)\right]du, \quad (3.4)$$

где $p(n,m)$ – стационарная вероятность состояния x процесса $\mathbf{x}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставив (3.4) в (3.2), умножив обе части полученного равенства на $\dfrac{p(n,m)}{F(n,m,\mathbf{y})}$, получим

$$p(m,n)\lambda = p(m-1,n)\lambda I_{m\neq 0} + p(m+1,n)\nu p.$$

Затем, подставив (3.4) в (3.3), поделив обе части полученного равенства на $F(n,m,\mathbf{y})B(y_n)$ и умножив на

$$p(n,m)\int_0^{y_n}\left[1-B(u)\right]du,$$

получим

$$p(m,n)\left[\mu I_{n\neq 0} + \nu I_{m\neq 0}\right] = p(m,n+1)\mu +$$
$$+p(m+1,n-1)\nu(1-p)I_{n\neq 0}, \ (m,n)\in X.$$

Сложив оба полученных уравнения, получим уравнение глобального равновесия (2.4) для изолированного узла с контрольной очередью для марковского случая. □

3.2 *Инвариантность финального распределения открытой сети с контрольными очередями и карантинным узлом*

Теперь рассмотрим инвариантность финального распределения открытой сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. Сохранив предположения о независимости процессов поступления, проверки на «стандартность» и обслуживания заявок, будем предполагать, что $B_i(t)$ – произвольная функция распределения неотрицательной случайной величины, в таком случае процесс $\mathbf{x}(t)$, описывающий число заявок в узлах открытой сети обслуживания в момент времени *t*, не является марковским, тем не менее для него справедлива следующая теорема.

***Теорема* 3.2.** *При выполнении условий*

$$\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i} < 1, \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i} < 1 \ \left(i=\overline{1,N}\right), \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1$$

и (1.1), *случайный процесс, описывающий число заявок в открытой сети обслуживания в момент времени t, имеет финальное строго положительное распределение вида*

$$p(\mathbf{x}) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_{N+1}(x_{N+1}), \ x\in X,$$

с множителями

$$p_i(\mathbf{x}_i) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)^{m_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right)^{n_i}\times$$
$$\times\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right), \ i=\overline{1,N},$$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}}\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в *i*-ом узле с момента *t* до момента окончания времени обслуживания, где *k* – номер позиции, на которой находится заявка в обычной очереди от «хвоста» очереди к прибору. Тогда вектор

$$\boldsymbol{\tau}_i(t) = \tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \ldots, \tau_{in_i}(t)$$

описывает остаточные времена обслуживания всех задач *i*-го узла, находящихся в обычной очереди. Поскольку, вообще говоря, $\mathbf{x}(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\boldsymbol{\zeta}(t) = \{\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)\}$, добавляя к $\mathbf{x}(t)$ непрерывную компоненту

$$\boldsymbol{\tau}(t) = (\boldsymbol{\tau}_1(t); \boldsymbol{\tau}_2(t); \ldots; \boldsymbol{\tau}_N(t)).$$

Введем обозначение

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,n_1}, y_{2,1}, \ldots, y_{2,n_2}, \ldots$$
$$\ldots, y_{N,1}, \ldots, y_{N,n_N}, y_{N+1,1}, \ldots, y_{N+1,n_{N+1}}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \ldots$$
$$\ldots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\}.$$

В [1] доказано, что марковский процесс $\mathbf{x}(t)$ при выполнении условий теоремы 2 в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [7] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Так как $\mathbf{x}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $\mathbf{x}(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\boldsymbol{\zeta}(t)$, так как $\boldsymbol{\zeta}(t)$ получается из $\mathbf{x}(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Положим, что $[\widetilde{y_i}]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(y_1, y_2, \ldots, y_{N+1})$, а на месте *i*-го элемента находится элемент $\widetilde{y_i}$.

Пусть *h* – положительная малая величина. Рассмотрим вероятность события

$$P\{\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t+h) < y_{i,1}, \ldots$$
$$\ldots, \tau_{i,n_i}(t+h) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\},$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени *t*:

а) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в *i*-ом, в контрольной очереди было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},$$
$$i=\overline{1,N},\ \tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\};$$

за время h заявка пришла в контрольную очередь извне (вероятность $\lambda p_{0,i}h+o(h)$) и за остаточное время не успела обслужиться в узле (вероятность $B_i(y_{i,n_i}+\theta_1 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}\times$$
$$\times\left(\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)B_i(y_{i,n_i}+\theta_1 h)I_{m_i\neq 0};$$

б) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в i-ом, в обычной очереди было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$\tau_{i,n_i+1}(t)<h,\ i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\},$$

и за время h заявка обслужилась и покинула узел (вероятность p_{i0}); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$\tau_{i,n_i+1}(t)<h,i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}p_{i0};$$

в) сеть находилась в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},i=\overline{1,N+1}\};$$

за время h заявки не покидали i-й узел, за счет обслуживания (вероятность $B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)$) и не переходили в обычную очередь из контрольной (вероятность $1-\nu_i h+o(h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},i=\overline{1,N+1}\}\times$$
$$\times B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)\left(1-\nu_i h+o(h)\right);$$

г) сеть находилась в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность остаточное время обслуживания заявки, находящейся в i-ом $\left(i=\overline{1,N+1}\right)$ узле на месте n_i, было в диапазоне $\left[h,h+y_{i,n_i}\right]$

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,h\le\tau_{i,n_i}(t)<h+y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N+1}\},$$

и за время h заявки не поступали в узел (вероятность $1-\lambda p_{0i}h+o(h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,h\le\tau_{i,n_i}(t)<h+y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N+1}\}\left(1-\lambda p_{0i}h+o(h)\right);$$

д) хотя бы в одном из узлов, скажем в i-ом $\left(i=\overline{1,N}\right)$, в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в обычной очереди на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n-1}(t)<y_{i,n-1},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\};$$

за время h заявка после проверки на стандартность была признана стандартной и перешла в обычную очередь i-го узла (вероятность $\left(\nu_i h+o(h)\right)(1-p_i)$), и за остаточное время не успела обслужиться (вероятность $B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n-1}(t)<y_{i,n-1},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}\times$$
$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)(1-p_i)B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)I_{n_i\neq 0};$$

е) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в i-ом, в контрольной очереди было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в карантинном узле было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i+1}(t)<y_{i,n_i+1},i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t)<y_{N+1,n_{N+1}-1}\};$$

за время h заявка после проверки на стандартность была признана нестандартной и отправилась в карантинный узел (вероятность $\left(\nu_i h+o(h)\right)p_i$), и за остаточное время не успела обслужиться в карантинном узле (вероятность $B_{N+1}(y_{N+1n_{N+1}}+\theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i+1}(t)<y_{i,n_i+1},\ i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t)<y_{N+1,n_{N+1}-1}\}\times$$
$$\times B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}+\theta_2 h)I_{n_{N+1}\neq 0}p_i;$$

ж) в карантинном узле было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N},\ \tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\};$$

за время h заявка после обслуживания в карантинном узле была обезврежена и покинула сеть (вероятность p_{N+10}); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N},\ \tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\}p_{N+1,0};$$

з) в карантинном узле было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в контрольной очереди i-го узла было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},$$
$$i=\overline{1,N},\ \tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\};$$

за время h заявка после обслуживания в карантинном узле была восстановлена и перешла в i-ый узел (вероятность $p_{N+1,i}$), и за остаточное время не успела обслужиться в i-ом узле (вероятность $B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},$$
$$i=\overline{1,N},\ \tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\}\times$$
$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)p_{N+1,i};$$

и) хотя бы в одном из узлов, скажем в j-ом $\left(j=\overline{1,N}\right)$, в обычной очереди было на одну заявку больше чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в каком-то другом, скажем i-ом $\left(i=\overline{1,N}\right)$, было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,\tau_{j,1}(t)<y_{j,1},\ldots$$
$$\ldots,\tau_{j,n_j}(t)<y_{j,n_j},\tau_{j,n_j+1}(t)<h,\ j=\overline{1,N},$$
$$\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},\ldots,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},i=\overline{1,N}\};$$

за время h заявка после обслуживания в j-ом узле перешла в контрольную очередь i-го узла (вероятность p_{ji}) и за остаточное время не успела обслужиться (вероятность $B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,\tau_{j,1}(t)<y_{j,1},...$$
$$...,\tau_{j,n_j}(t)<y_{j,n_j},\tau_{j,n_j+1}(t)<h,\ j=\overline{1,N},$$
$$\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},i=\overline{1,N}\}\times$$
$$\times B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)I_{m_i\neq 0}p_{ji};$$

вероятность того, что произойдет не менее двух изменений состояний сети, равна $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем

$$P\{\mathbf{x}(t+h)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t+h)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i}(t+h)<y_{i,n_i},\ i=\overline{1,N+1}\}=$$
$$=P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}\times$$
$$\times\left(\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)B_i(y_{i,n_i}+\theta_1 h)I_{m_i\neq 0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$\tau_{i,n_i+1}(t)<h,\ i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}p_{i0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},i=\overline{1,N+1}\}\times$$
$$\times B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)\left(1-\nu_i h+o(h)\right)+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,h\le\tau_{i,n_i}(t)<h+y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N+1}\}\left(1-\lambda p_{0i}h+o(h)\right)+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n-1}(t)<y_{i,n-1},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}}(t)<y_{N+1,n_{N+1}}\}\times$$
$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)(1-p_i)B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)I_{n_i\neq 0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i+1}(t)<y_{i,n_i+1},i=\overline{1,N},$$
$$\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t)<y_{N+1,n_{N+1}-1}\}\times$$
$$\times B_{N+1}(y_{N+1n_{N+1}}+\theta_2 h)I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},$$
$$i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\}p_{N+1,0}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},i=\overline{1,N},\tau_{N+1,1}(t)<y_{N+1,1},...$$
$$...,\tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t)<h\}\times$$
$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)p_{N+1,i}+$$
$$+P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,\tau_{j,1}(t)<y_{j,1},...$$
$$...,\tau_{j,n_j}(t)<y_{j,n_j},\tau_{j,n_j+1}(t)<h,\ j=\overline{1,N},$$
$$\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...,\tau_{i,n_i-1}(t)<y_{i,n_i-1},\ i=\overline{1,N}\}$$
$$\times B_i(y_{in_i}+\theta_2 h)I_{m_i\neq 0}p_{ji}.$$

Далее, каждую вероятность выразим через функции вида

$$F(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=P\{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x},\tau_{i,1}(t)<y_{i,1},...$$
$$...,\tau_{i,n_i}(t)<y_{i,n_i},i=\overline{1,N+1}\}.$$

Таким образом, получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений

$$F\left(\mathbf{x},t+h,\mathbf{y}\right)=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,n,t,\mathbf{y}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)B_i(y_{i,n_i}+\theta_1 h)I_{m_i\neq 0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)\times$$
$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)p_{N+1,i}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\Big(F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i}+h\right]\right)-$$
$$-F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},h\right]\right)\Big)\times\left(1-\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)+$$
$$+\Big(F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}+h\right]\right)-$$

$$-F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},h\right]\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\lambda p_{0,N+1}h+o(h)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}\right]\right)\times$$
$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)(1-p_i)B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)I_{n_i\neq 0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}\right]\right)\times$$
$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}+\theta_2 h)I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$
$$+F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)p_{N+1,0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)\left(1-\nu_i h+o(h)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{j,1},...,y_{j,n_j},h\right]\right)\times$$
$$\times B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)I_{m_i\neq 0}p_{j,i}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i},h\right]\right)p_{i,0},\mathbf{x}\in X.$$

Рассматривая $F(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ как сложные функции от t и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t, y_{i,n_i} и y_{i,n_i+1}, запишем разложение этих функций по формуле Тейлора

$$F\left(\mathbf{x},t+h,\mathbf{y}\right)=F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)+\frac{F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial t}h+o(h);$$
$$B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)=B(y_{i,n_i});$$
$$B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}+\theta_2 h)=B(y_{N+1,n_{N+1}});$$
$$F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i},h\right]\right)=$$
$$=\frac{F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i},0\right]\right)}{\partial y_{i,n_i+1}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},h\right]\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},0\right]\right)}{y_{i,n_i}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i}+h\right]\right)=$$
$$=F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)+\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial y_{i,n_i}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},0\right]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}h+o(h);$$

$$F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+11},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},h\right]\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0\right]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}+h\right]\right)=$$
$$=F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}\right]\right)+$$
$$+\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}\right]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}h+o(h);$$
$$F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{j,1},...,y_{j,n_j},h\right]\right)=$$
$$=\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0\right]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}h+o(h).$$

Таким образом, имеем

$$F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)+\frac{F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial t}h+o(h)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,n,t,\mathbf{y}\right)\left(\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)\times$$
$$\times B_i(y_{i,n_i}+\theta_1 h)I_{m_i\neq 0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i},0\right]\right)}{\partial y_{i,n_i+1}}h+o(h)\right)p_{i0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)\left(1-\nu_i h+o(h)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h\right]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}h+o(h)\right)\times$$
$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)p_{N+1,i}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)+\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial y_{i,n_i}}h+o(h)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},0\right]\right)}{y_{in_i}}h+o(h)\right)+$$
$$\times\left(1-\lambda p_{0,i}h+o(h)\right)+$$
$$+\left(F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}\right]\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1n_{N+1}}\right]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}h-$$
$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\left[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0\right]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}h\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,t,\left[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}\right]\right)\times$$

$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)(1-p_i)B(y_{i,n_i}+\theta_2 h)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},t,\left[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}\right]\right)\times$$

$$\times\left(\nu_i h+o(h)\right)B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}+\theta_2 h)I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$

$$+\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},t,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},0]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}h+o(h)\right)p_{N+1,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,t,[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}h+o(h)\right)\times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i}+\theta_2 h)I_{m_i\neq 0}p_{j,i},\ \ \mathbf{x}\in X.$$

Приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на h, при $h\to 0$ получим

$$\frac{F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial t}+\lambda\sum_{i=1}^{N}p_{0,i}F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)B_i(y_{i,n_i})\nu_i I_{m_i\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,t,\mathbf{y}\right)\lambda p_{0,i}B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,t,[y_{i,1},...,y_{i,n_i},0]\right)}{\partial y_{i,n_i+1}}p_{i,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,t,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}\times$$

$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i})p_{N+1,i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,\mathbf{y}\right)}{\partial y_{i,n_i}}-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{i,1},\dots,y_{i,n_i-1},0]\right)}{y_{i,n_i}}\right)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\dots,y_{N+1,n_{N+1}}]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\dots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}\right)I_{n_{N+1}\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,t,[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i(1-p_i)B_i(y_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},t,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},0]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}p_{N+1,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},t,[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}})I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,t,[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}\times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}p_{j,i},\ \ \mathbf{x}\in X.$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}p_{0,i}F\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)B_i(y_{i,n_i})\nu_i I_{m_i\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\mathbf{y}\right)\lambda p_{0,i}B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,[y_{i,1},...,y_{i,n_i},0]\right)}{\partial y_{i,n_i+1}}p_{i,0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}\times$$

$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i})p_{N+1,i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}{\partial y_{i,n_i}}-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},[y_{i,1},\dots,y_{i,n_i-1},0]\right)}{y_{i,n_i}}\right)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},[y_{N,1},...,y_{N,n_N},0]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}p_{N+1,0}+$$

$$+\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},[y_{N+1,1},\dots,y_{N+1,n_{N+1}}]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},[y_{N+1,1},\dots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}\right)I_{n_{N+1}\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i(1-p_i)B_i(y_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i B_{N+1}(y_{N+1n_{N+1}})I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}\times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}p_{j,i},\ \ x\in X. \tag{3.5}$$

Разобьем уравнение глобального равновесия (3.5) на уравнения локального равновесия следующим образом

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}p_{0,i}F\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^2,[y_{i,1},...,y_{i,n_i},0]\right)}{\partial y_{i,n_i+1}}p_{i,0}+$$

$$+\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1},[y_{N,1},...,y_{N,n_N},0]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}p_{N+1,0}; \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)B_i(y_{i,n_i})\nu_i I_{m_i\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\mathbf{y}\right)\lambda p_{0,i}B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}\times$$

$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i})p_{N+1,i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}}-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},0]\right)}{y_{i,n_i}}\right)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i(1-p_i)B_i(y_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_iB_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}})I_{n_{N+1}\neq 0}p_i+$$

$$+\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}\right)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}\times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}p_{j,i},\ x\in X. \qquad (3.7)$$

Далее, разобьем уравнение локального равновесия (3.7) на еще более детальные уравнения локального равновесия следующим образом

$$\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{x},\mathbf{y})B(y_{i,n_i})\nu_iI_{m_i\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i^1,\mathbf{y}\right)\lambda p_{0,i}B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1,[y_{N,1},...,y_{N,n_N},h]\right)}{\partial y_{N,n_N+1}}\times$$

$$\times I_{m_i\neq 0}B_i(y_{i,n_i})p_{N+1,i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}}-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},[y_{i,1},\ldots,y_{i,n_i-1},0]\right)}{y_{i,n_i}}\right)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2,[y_{i,1},...,y_{i,n_i-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_i(1-p_i)B_i(y_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1,[y_{j,1},...,y_{j,n_j},0]\right)}{\partial y_{j,n_j+1}}\times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i})I_{m_i\neq 0}p_{j,i},\ x\in X; \qquad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}-1},0]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\left(\mathbf{x},t,[y_{N+1,1},\ldots,y_{N+1,n_{N+1}}]\right)}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}}\right)I_{n_{N+1}\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1},[y_{N,1},...,y_{N,n_N-1}]\right)\times$$

$$\times\nu_iB_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}})I_{n_{N+1}\neq 0}p_i,\ x\in X. \qquad (3.9)$$

Не трудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по y решением уравнений локального равновесия (3.6), (3.8) и (3.9), а следовательно, и уравнения глобального равновесия (3.5), является

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y})=p(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_i}\mu_i\int_0^{y_{ik}}\left[1-B_i(u)\right]du, \qquad (3.10)$$

где $p(\mathbf{x})$ – стационарная вероятность состояния $\mathbf{x}$ процесса $\mathbf{x}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставив (3.10) в (3.6), умножив обе части полученного равенства на $\dfrac{p(\mathbf{x})}{F(\mathbf{x},\mathbf{y})}$, получим уравнение локального равновесия для открытой сети обслуживания в марковском случае (2.2). Затем, подставив (3.10) в (3.8), поделив обе части полученного равенства на $F(\mathbf{x},\mathbf{y})B_i\left(y_{in_i}\right)$ и умножив на $p(\mathbf{x})\int_0^{y_{in_i}}\left[1-B_i(u)\right]du$, получим

$$p(\mathbf{x})\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_iI_{n_i\neq 0}+\sum_{i=1}^{N}\nu_iI_{m_i\neq 0}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p\left(\mathbf{x}-e_i^1\right)\lambda p_{i0}I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}p\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_i^2\right)\nu_i(1-p_i)I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j^2-\mathbf{e}_i^1\right)\mu_jp_{j,i}I_{m_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}p\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_{N+1}-\mathbf{e}_i^1\right)\mu_{N+1}p_{N+1,i}I_{m_i\neq 0},\ x\in X. \qquad (3.11)$$

Далее, подставив равенство (3.10) в (3.9), поделив обе части полученного равенства на

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y})B_{N+1}\left(y_{N+1n_{N+1}}\right)$$

и умножив на $p(\mathbf{x})\int_0^{y_{N+1n_{N+1}}}\left[1-B_{N+1}(u)\right]du$, получим

$$p(\mathbf{x})\mu_{N+1}I_{n_{N+1}\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i^1-\mathbf{e}_{N+1}\right)\nu_ip_iI_{n_{N+1}\neq 0}. \qquad (3.12)$$

Сложив уравнения (3.11) и (3.12), получим уравнение локального равновесия для открытой сети обслуживания для марковского случая (2.3). □

Заключение

В данной работе рассмотрена открытая сеть массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. На основе ранее полученных условий эргодичности, установленных в [1], доказано, что стационарное распределение числа заявок в узлах сети является инвариантным относительно распределений времен обслуживания при фиксированных средних значениях.

Полученный результат подтверждает наличие у данной модели свойства нечувствительности и, тем самым, существенно расширяет класс сетей массового обслуживания, для которых возможно применение универсальных стационарных характеристик без учета конкретной формы распределений обслуживания.

Результаты работы могут быть использованы при моделировании и анализе систем с механизмами контроля, фильтрации и карантина заявок, в том числе в телекоммуникациях, логистике и биоинформационных системах. В дальнейшем представляется перспективным исследование аналогичных свойств для сетей с более сложными маршрутными и приоритетными структурами.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Ю.В. Малинковскому за проявленное внимание к работе и неоценимую помощь, оказанную в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Летунович*, *Ю.Е*. Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

2. *Open*, *closed and mixed networks of queues with different classes of customers* / F.E. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, F.G. Palacios // J. Assoc. Comput. Mach. – 1975. – Vol. 22, № 2. – P. 248–260.

3. *Towsley*, *D*. Queueing network models with state-dependent routin / D. Towsley // J. Assoc. Comput. Mach. – 1980. – Vol. 27, № 2. – P. 323–337.

4. *Малинковский*, *Ю.В*. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 67–79.

5. *Малинковский*, *Ю.В*. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания / Ю.В. Малинковский, С.Ю. Евмененко // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 93–100.

6. *Малинковский*, *Ю.В*. Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С. 29–36.

7. *Гнеденко*, *Б.В*. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – Москва: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 09.02.2026.

Информация об авторах
Евмененко Станислав Юрьевич – аспирант