

С. А. ГАБОВ

**ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ
СТЕНКЕ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 IX 1973)

Пусть в неограниченном бассейне, вращающемся вокруг вертикальной оси против часовой стрелки с угловой скоростью ω , имеется вертикальная стенка $y=0$, $x \leq 0$. Глубина бассейна постоянна и равна h . Предположим, что возвышения длинных волн, существующих в бассейне, имеют гармоническую зависимость от времени, т. е. $\zeta(x, y, t) = \zeta(x, y) e^{i\omega t}$. В этом случае амплитуды возвышений $\zeta(x, y)$ удовлетворяют (см. (1)) уравнению

$$[\Delta + (\sigma^2 - 4\omega^2)/(gh)] \zeta(x, y) = 0, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, а g — ускорение силы тяжести. Предположив, что $\sigma > 2\omega$, введем обозначения: $\kappa^2 = (\sigma^2 - 4\omega^2)/(gh)$ и $l = 2\omega/\sigma$. Амплитуда возвышений $\zeta(x, y)$ связана с y -компонентами скоростей частиц жидкости $v(x, y)$ следующим образом:

$$v(x, y) = \frac{\sigma}{\kappa^2 h} \left[i \frac{\partial}{\partial y} - l \frac{\partial}{\partial x} \right] \zeta(x, y).$$

Пусть вдоль стенки в области ($y > 0$) из бесконечности распространяется волна Кельвина

$$\zeta_0(x, y) e^{i\omega t} = e^{-\eta \kappa y - i \kappa x + i \omega t}, \quad (2)$$

где $\eta = (1 - l^2)^{-1/2}$. Исследуем процесс дифракции волны Кельвина на ребре полубесконечной стенки.

Представим в области 1 ($y > 0$) полную амплитуду возвышений в виде $\zeta_0 + \zeta_1$, а в области 2 ($y < 0$) полную амплитуду обозначим через ζ_2 .

Для неизвестных функций ζ_i получим следующую задачу. Найти ограниченные функции ζ_1 и ζ_2 , удовлетворяющие уравнению (1), граничным условиям

$$v_1(x, 0+0) = 0, \quad v_2(x, 0-0) = 0 \quad \text{при } x < 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения: при $x > 0$

$$\zeta_0(x, 0+0) + \zeta_1(x, 0+0) = \zeta_2(x, 0-0) \quad (4)$$

$$v_1(x, 0+0) = v_2(x, 0-0). \quad (5)$$

На ребре вертикальной стенки потребуем выполнения условия

$$v_j = r^{-1/2} O(1) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (6)$$

где r — расстояние до ребра стенки. Потребуем также, чтобы функции ζ_i удовлетворяли условиям излучения, т. е. соответствовали волнам, уходящим на бесконечность.

Для выделения единственного решения задачи (1)–(6), удовлетворяющего условиям излучения, воспользуемся принципом предельного поглощения. Для этого предположим, что $\kappa = \kappa_1 - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и будем считать,

что функции ξ_j и v_j принадлежат классу функций, удовлетворяющих на бесконечности условию

$$|\xi_j|, |v_j| \leq C e^{-\epsilon r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что задача (1)–(6) с комплексным κ в классе функций (7) имеет единственное решение. В окончательных результатах ϵ устремим к нулю и получим единственное решение задачи (1)–(6), удовлетворяющее принципу предельного поглощения.

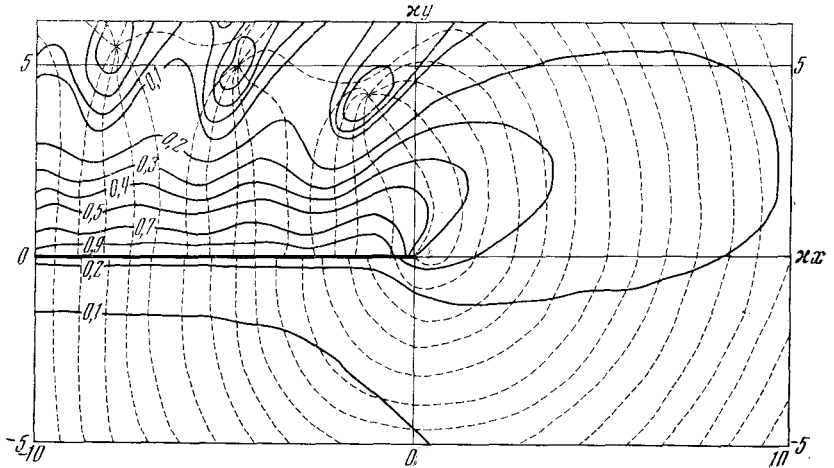


Рис. 1

Решение задачи (1)–(6) при указанных предположениях находится методом Винера – Хопфа в интерпретации Джонса (2). Окончательная формула имеет вид

$$\xi_j(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{\eta \sqrt{1+\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa|y|\sqrt{p^2-1}-i p \kappa x}}{\sqrt{p-1}(\delta_j \sqrt{p^2-1}-lp)} dp, \quad (8)$$

где $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$ и интегрирование ведется по вещественной оси плоскости p с обходом особых точек подынтегральных функций, причем отрицательные особые точки обходятся снизу, а положительные сверху. Здесь также уже совершен предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$.

Введем теперь полярные координаты по формулам $|y|=r \sin \theta$, $x=r \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Интегралы (8), описывающие ξ_j , могут быть выражены через интегралы Френеля (2). Обозначим через z_c^\pm и z_s^\pm следующие величины:

$$z_c^\pm = \sqrt{2\kappa r} \cos [1/2(\theta \pm i\psi)], \quad z_s^\pm = \sqrt{2\kappa r} \sin [1/2(\theta \pm i\psi)],$$

где ψ определяется из соотношений $\cos(i\psi) = \eta$ и $\sin(i\psi) = i\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} e^{-i\kappa r - i\pi/4} \left\{ i \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}} \mathfrak{F}(z_c^+) + \mathfrak{F}(z_s^+) \right\}, \\ \xi_2 &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} e^{-i\kappa r - i\pi/4} \left\{ i \sqrt{\frac{\eta-1}{\eta+1}} \mathfrak{F}(z_c^-) - \mathfrak{F}(z_s^-) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathfrak{F}(z) = e^{iz^2} F(-z)$, а $F(z) = \int_{-\infty}^z e^{-iv^2} dv$ — интеграл Френеля.

Отметим, что, используя разложение интегралов Френеля в степенные ряды, легко можно получить разложение функций ξ_j в степенные ряды по r , которые будут сходиться при всех r .

Для выяснения характерных особенностей процесса дифракции волны Кельвина на ребре стенки выпишем асимптотические формулы для амплитуды возвышений ⁽²⁾

$$r_1 + r_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi \kappa r l \cos \theta - i \sin \theta}} \frac{1}{\eta \sqrt{1+\eta}} e^{-i \kappa r + i \pi / 4} + O[(\kappa r)^{-3/2}]. \quad (10)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi \kappa r l \cos \theta + i \sin \theta}} \frac{1}{\eta \sqrt{1+\eta}} e^{-i \kappa r + i \pi / 4} + O[(\kappa r)^{-3/2}]. \quad (11)$$

Эти формулы выписаны без учета волн Кельвина. Поэтому при вычислении полной амплитуды волн при углах $\pi/2 < \theta \leq \pi$ к формуле (10) необходимо прибавить член, отвечающий идущей из бесконечности волне Кельвина $\xi_0(x, y)$, а к формуле (11) надо прибавить член, также описывающий волну Кельвина:

$$\xi_{2\text{Kel}} = \frac{i l \eta}{1+\eta} e^{-\kappa r \eta \sin \theta + i \kappa r \eta \cos \theta}. \quad (12)$$

Для того чтобы выяснить характер волнового движения в окрестности ребра, представим результаты численного анализа решений ξ_j . Для численных расчетов использовали формулы (9) и принимали $l=0,5$. Результаты численных расчетов представлены на рис. 1. Сплошными кривыми изображены линии равной амплитуды, а пунктиром — линии равной фазы, причем значения фаз на соседних линиях отличаются на $\pi/4$. Из этого рисунка видно, что в области $0 \leq \kappa y \leq 6$ и $-10 \leq \kappa x \leq 0$ существуют три характерные точки, которые в гидродинамике получили название амфидромических точек. Эти точки характеризуются тем, что в них амплитуда равна нулю и сходятся линии равных фаз. Оказывается, что таких точек в области $\kappa y > 0$ и $\kappa x < 0$ существует бесчисленное множество. Причем, если воспользоваться формулами (2) и (10) и пронумеровать все амфидромические точки по мере их удаления от ребра, то для координат этих точек можно получить

$$\begin{aligned} \kappa y_m &= \frac{3}{2l\eta} \ln X_m - \frac{1}{l\eta} \ln \ln X_m - \frac{1}{2l\eta} \ln \left[\frac{9}{4\pi} \frac{1}{\eta^4(\eta+1)} \right] + O \left[\frac{\ln \ln(m)}{\ln(m)} \right], \\ \kappa x_m &= -X_m + \frac{9}{8} \frac{1}{l^2 \eta^2} \frac{\ln^2 X_m}{X_m} + O \left[\frac{\ln(m)}{m} \ln \ln(m) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $X_m = \frac{\pi}{1+\eta} (2m - 3/4)$ и m — номер амфидромической точки.

Обсудим полученные результаты. Из формул (10)–(12) следует, что в области «геометрической тени» (область $x < 0, y < 0$) вдоль стенки распространяется волна Кельвина. Таким образом, происходит как бы разворот волны Кельвина вокруг ребра стенки. Этот разворот происходит при всех значениях параметра $l=2\omega/\sigma$ с уменьшением амплитуды волны. Это уменьшение амплитуды является естественным, так как, кроме указанного процесса разворота волны Кельвина, имеет место процесс рассеяния энергии падающей волны Кельвина на ребре; он совершается посредством цилиндрических волн, которые можно рассматривать как результат излучения источников, локализованных на ребре стенки. В об-

ласти $x < 0$, $y > 0$ в результате интерференции падающей волны Кельвина и цилиндрических волн, идущих от ребра, возникает система амфидромических точек, координаты которых определяются формулами (13).

Автор признателен проф. А. Г. Свешникову и С. Я. Секерж-Зеньковичу за помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости, М.—Л., 1936. ² С. А. Габов, Вестн. Московск. ун-ва, сер. мат. и мех., № 5, 100 (1973).