Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. КОНСТАНТИНОВ, Д. Д. БАЙНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРХНЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ИТЕРИРОВАННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 16 XI 1973)

В работе ([1]) получены достаточные условия существования решения систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции.

В настоящей работе находятся достаточные условия существования решения начальной задачи для уравнений сверхнейтрального типа, причем правая часть этих уравнений является функционалом, заданным на некотором содержащем искомое решение множестве, и зависит, кроме того, от значений производной решения посредством итерированного функционального запаздывания.

Рассматривается начальная задача

$$y(t)=\begin{cases} f(t,x_t(s),x(\tau_0),y(t),y(\Delta_0)), & t>0, \\ \psi(t), \ t\leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$x(t)=\xi_0+\int_0^t y(s)\,ds.$$

Здесь при каждом $t\in J_0=(-\infty,0]$ $y(t)$, $x(t)\in E^n$ (E^n — n-мерное пространство на числовом поле E). При этом f—n-мерный вектор-функционал, определенный на некотором множестве X, $x\in X$. При каждом $t\in I_T=[0,T]$ функционал f зависит от $x(\tau_0)$, $y(t)$, $y(\Delta_0)$ и от t как непосредственно, так и через посредство значений функции $x(s)$ при $s\in J_t$, т. е., $x_t(s)$ есть сужение функции $x(s)$ на интервал J_t. Запаздывания τ_0 и Δ_0 определяются при помощи рекуррентных зависимостей

$$\tau_k=\tau_k(t,\ x_t(s);\ x(\tau_{k+1}),\ y(t),\ y(\Delta_{k+1})),$$

$$\Delta_k=\Delta_k(t,\ x_t(s);\ x(\tau_{k+1}),\ y(t),\ y(\Delta_{k+1})),\quad k=0,\ldots,m-1,\quad m\geqslant 1;$$

$$\tau_m=\tau_m(t,\ x_t(s);\ y(t)),\quad \Delta_m=\Delta_m(t,\ x_t(s);\ y(t)).$$

Итерированные запаздывания τ_k, Δ_k, $k=0,\ldots,m$, суть скалярные функционалы, аналогичные функционалу f.

Пусть $F=F(t)$ — неотрицательная, ограниченная и суммируемая на интервале I_T скалярная функция такая, что $F(0)=\|\psi(0)\|$.

Определим следующие множества из E^n:

$$\omega=\left\{\xi:\ \|\xi\|\leqslant\|\xi_0\|+\int_0^T F(t)\,dt\right\}\bigcup_{t\in J_0}\left\{\xi_0+\int_0^t\psi(s)\,ds\right\},$$

$$\Omega_T=\{\eta:\ \|\eta\|\leqslant F^*=\sup_{t\in I_T}F(t)\},$$

$$\tilde\Omega=\bigcup_{t\in J_0}\{\psi(t)\},\quad \tilde\Omega_T=\Omega_T\cup\tilde\Omega.$$

Пусть $Y\subset C_T$ (C_T — пространство непрерывных функций $y\colon J_T \xrightarrow{y} E^n$):

$$Y=\{y\colon \|y(t)\|\leqslant F(t),\ t\in I_T;\ y(t)=\psi(t),\ t\in J_0\}.$$

Множеству Y сопоставим множество $X\subset C_T$ (X — область определения функционалов f, τ_k, Δ_k):

$$X=\left\{x\colon x(t)=\xi_0+\int\limits_0^t y(s)\,ds,\ y\in Y\right\}.$$

Дальше сделаны следующие предположения:

А. Функционал $f(t, x_t(s), \xi, \eta_1, \eta_2)$ определен на множестве X и непрерывен там при $(t, \xi, \eta_1, \eta_2)=(t_0\Xi)\in G_T=I_T\times\omega\times\Omega_T\times\widetilde{\Omega}_{T-\Delta}$ ($\Delta>0$ — некоторое число, которое определим ниже) в следующем смысле: для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех x, $\bar{x}\in X$, удовлетворяющих условию $\|x-\bar{x}\|_C\leqslant\delta$, и для всех t, $\bar{t}\in I_T$, удовлетворяющих условию $|t-\bar{t}|\leqslant\delta$, выполняется неравенство

$$\|f(t,\ x_t(s);\ \Xi)-f(\bar{t},\ \bar{x}_{\bar{t}}(t);\ \Xi)\|\leqslant\varepsilon.$$

Б. Функционалы τ_k, Δ_k, $k=0,\ldots,m$, удовлетворяют условию А, где только $\|\cdot\|$ следует заменить на $|\cdot|$.

В. Функционал $f(t, x_t(s), \xi, \eta_1, \eta_2)$ удовлетворяет условиям Липшица по ξ, η_1 и η_2 с константами L, M_1 и M_2 соответственно при $x\in X$, $(t, \Xi)\in G_T$.

Г. Функционалы $\tau_k(t, x_t(s); \xi, \eta_1, \eta_2)$, $\Delta_k(t, x_t(s); \xi, \eta_1, \eta_2)$, $k=0,\ldots,m$, удовлетворяют условиям Липшица по ξ, η_1 и η_2 с константами λ, μ_1 и μ_2 соответственно при $x\in X$, $(t, \Xi)\in G_T$.

Д. Выполнены условия

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\inf\{f-\tau_k(t,\ x_t(s);\ \Xi)\colon x\in X,\ (t,\ \Xi)\in G_T\}\geqslant 0,$$

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\inf\{t-\Delta_k(t,\ x_t(s);\ \Xi)\colon x\in X,\ (t,\ \Xi)\in G_T\}=\Delta>0.$$

Е. Функция ψ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\psi(t)-\psi(\bar{t})\|\leqslant\beta|t-\bar{t}|,\quad t,\ \bar{t}\in J_0,$$

и ограничена.

Ж. Выполнено условие согласования

$$\psi(0)=f(0,\ \varphi_{t=0}(s);\ \varphi(\tau_0^0),\ \psi(0),\ \psi(\Delta_0^0)),$$

где $\varphi(t)=\xi_0+\int\limits_0^t\psi(s)\,ds$, а через τ_0^0, Δ_0^0 обозначены соответствующие запаздывания, в которых t, $x(t)$ и $y(t)$ следует заменить на 0, $\varphi(0)$ и $\psi(0)$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А—Ж. *Пусть, кроме того,*

$$\nu=M_1+\mu_1 Q\,\frac{1-q^{m+1}}{1-q}<1,$$

где

$$Q=L\Phi+M_2\beta,\quad q=\lambda\Phi+\mu_2\beta,\quad \Phi=\max\{F^*,\ \sup_{t\in J_0}\|\psi(t)\|\}.$$

Тогда начальная задача (1) имеет по крайней мере одно непрерывное решение на интервале J_h, где $h=\min\{T,\ \Lambda\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *при* $T=\infty$. *Пусть, кроме того, на множестве* X *выполнены условия*

$$\|f(t,\ x_t(s);\ \Xi)-f(\bar{t},\ x_{\bar{t}}(s);\ \Xi)\|\leqslant K|t-\bar{t}|,$$
$$|\gamma_k(t,\ x_t(s);\ \Xi)-\gamma_k(\bar{t},\ x_{\bar{t}}(s);\ \Xi)|\leqslant\varkappa|t-\bar{t}|,\qquad 0\leqslant k\leqslant m$$

(*через* γ_k *обозначен какой-нибудь из функционалов* τ_k, Δ_k) *при* $(t,\Xi)\in G_\infty$. *Пусть, наконец,*

$$b_3-b_2\geqslant 2(b_1b_4)^{1/2},\quad b_1\geqslant 0,\quad b_2\geqslant 0,\quad b_3>0,\quad b_4\geqslant 0,$$

где

$$b_1=\varkappa L\Phi+K(1-\lambda\Phi),\qquad b_2=\varkappa M_2-K\mu_2,$$
$$b_3=(1-M_1)(1-\lambda\Phi)-\mu_1L\Phi,\qquad b_4=\mu_1M_2+\mu_2(1-M_1).$$

Тогда, если

$$\beta\leqslant\frac{1}{2b_4}[b_3-b_2+((b_3-b_2)^2-4b_1b_4)^{1/2}],$$

то начальная задача (1) *имеет по крайней мере одно почти всюду непрерывное решение на интервале* J_∞.

Высший машино-электротехнический институт
им. В. И. Ленина
София, Народная Республика Болгария

Поступило
16 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. П. Рудаков*, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 11 (1971).