

В. А. КУЗИВАНОВ, Ю. Н. СМЕРНОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ГРАВИМЕТРА

(Представлено академиком М. А. Садовским 12 VII 1973)

Геофизические исследования на морях и океанах приобретают все большее значение для изучения внутреннего строения Земли, для геологоразведочных и геодезических целей. В комплексе геофизических методов важное место имеют гравиметрические методы.

Требования к точности измерения ускорения силы тяжести на море непрерывно повышаются. Это требует более тонкого анализа поведения чувствительной системы морского гравиметра под действием инерциальных ускорений. Одному из вопросов такого анализа посвящается настоящая статья.

На чувствительную систему гравиметра, находящегося на движущемся корабле, действуют инерциальные ускорения. В качестве чувствительной системы гравиметра, как правило, применяется сильнодемпфированный маятник, положение которого близко к горизонтальному. Дифференциальное уравнение движения такого маятника (на идеальной гиropлатформе) можно представить в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + n^2 \left(1 - \frac{\ddot{x}}{n^2 l}\right) \varphi = \frac{1}{l} (\Delta g + \ddot{z}), \quad (1)$$

где φ — показание маятника (в радианах), 2λ — коэффициент демпфирования, n — собственная частота маятника, \ddot{x} , \ddot{z} — соответственно горизонтальные и вертикальные инерциальные ускорения, действующие на маятник, l — приведенная длина маятника, Δg — искомое приращение ускорения силы тяжести.

Уравнение (1) является уравнением типа Хилла с правой частью. Оно не имеет аналитического решения и его анализ представляет определенные трудности. Поэтому одним из авторов настоящей статьи было предложено (¹⁻³) в целях упрощения анализа отбросить в (1) член $\ddot{\varphi}$, учитывая, что $2\lambda \gg n^2 \gg 1$. Однако, с точки зрения выяснения условий возбуждения в системе резонансных колебаний (в особенности параметрических), пренебрежение в (1) членом $\ddot{\varphi}$ не является корректным. Здесь мы проанализируем вопрос об устойчивости решений уравнения (1) при наличии $\ddot{\varphi}$.

Рассмотрим простейший случай (1), когда

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 \cos \omega t, \quad \ddot{z} = \ddot{z}_0 \sin \omega t.$$

Обозначая

$$\frac{\ddot{x}_0}{l} \equiv h^*, \quad f(t) \equiv \frac{1}{l} (\Delta g + \ddot{z}_0 \sin \omega t),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + (n^2 - h^* \cos \omega t) \varphi = f(t). \quad (2)$$

Как известно, если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (2), то общее решение

уравнения (2) есть

$$\varphi = A\varphi_1 + B\varphi_2 - \left[\varphi_1 \int \frac{\varphi_2 f}{w} dt - \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 f}{w} dt \right], \quad (3)$$

где $w = \varphi_2 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2'$, A и B — константы.

Так как $f(t)$ — функция периодическая, устойчивость решения (3) будет определяться только устойчивостью решений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Следовательно, для анализа устойчивости решений (3) достаточно исследовать однородное уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + (n^2 - h^* \cos \omega t)\varphi = 0, \quad (3a)$$

которое может быть приведено к канонической форме уравнения Матье

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (a - 2q \cos 2\xi)u = 0; \quad (4)$$

здесь $u(\xi) = \varphi(t)e^{\kappa\xi}$, $\xi = 1/2\omega t$, $\kappa = 2\lambda/\omega$,

$$a = \frac{4}{\omega^2}(n^2 - \lambda^2), \quad q = \frac{2h^*}{\omega^2}.$$

Известно, что реальные чувствительные системы гравиметра характеризуются следующим диапазоном изменения параметров:

$$2\lambda = (10^3 - 10^4) \text{ сек}^{-1}; \quad (5)$$

$$n^2 = (50 - 150) \text{ сек}^{-2}.$$

Кроме того, для типичных возмущений ускорений

$$h^* = (10 - 100) \text{ сек}^{-2}, \quad (5a)$$

$$\omega = (10^{-2} - 10^2) \text{ сек}^{-1}.$$

Устойчивость решений уравнения Матье (4) определяется диаграммой Айнса — Стретта (4) (рис. 1), причем с учетом (4) — (5a) глубина модуляции $h = q/a$ отрицательна и изменяется в пределах $2 \cdot 10^{-7} \leq |h| \leq 2 \cdot 10^{-4}$. Так как по (4), (5) $a < 0$, то интересующие нас значения параметров a и q на диаграмме Айнса — Стретта находятся в узкой области практически между отрицательной осью a и лучом $|h_A| = 2 \cdot 10^{-4}$. Эта область (рис. 1) целиком заключена в зоне неустойчивых решений Матье. В указанной зоне штриховыми линиями для иллюстрации показаны несколько линий равного значения характеристического показателя μ (4), определяющего устойчивость решений уравнения Матье. Они пересекают ось отрицательных значений a под прямым углом. Легко убедиться, что в точке $(-|a|, 0)$ проходит линия характеристического показателя μ , соответствующего значению

$$\mu = \pm (-a)^{1/2} = \pm \frac{2}{\omega} (\lambda^2 - n^2)^{1/2}.$$

Каждой паре a_k и q_k будет отвечать вполне определенное значение характеристического показателя $\mu_k = \mu_k(a_k, q_k)$, причем соответствующее решение уравнения (4) по теореме Флоке (4) может быть записано в виде

$$u(\xi) = c_1 e^{\mu_k \xi} \Phi(\xi) + c_2 e^{-\mu_k \xi} \Phi(-\xi), \quad (6)$$

где $\Phi(\xi)$ — функция периодическая, а c_1, c_2 — константы.

Ясно, что при перемещении из точки (a_k, q_k) по линии равного значения μ_k в интересующей нас области (рис. 1) до точки пересечения ее с отрицательной осью ординат a , т. е. до точки $(-a, 0)$ в решении (6)

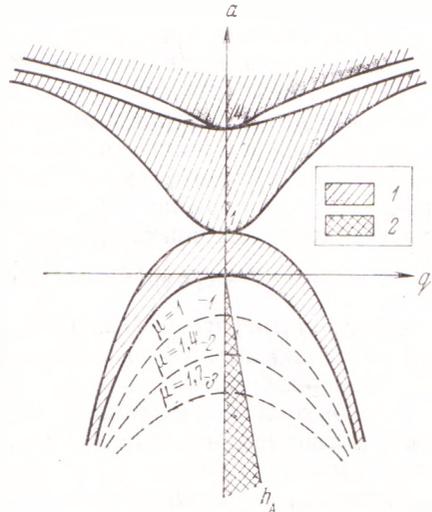


Рис. 1. Диаграмма Айнса — Стретта. 1 — зоны устойчивых решений уравнения Матье, 2 — область изменения параметров a_k и q_k , соответствующих значениям величин по (5) и (5a). Рисунок имеет качественный характер

будет меняться только периодическая функция $\Phi(\xi)$, что несущественно для характера устойчивости самого решения. С другой стороны, в точке $(-a, 0)$ уравнение Матье (4) трансформируется в уравнение

$$d^2u/d\xi^2 + au = 0, \quad a < 0, \quad (7)$$

решение которого очевидно:

$$u(\xi) = c_1 e^{\mu_k \xi} + c_2 e^{-\mu_k \xi}, \quad (8)$$

причем

$$\mu_k = \pm \frac{2}{\omega} (\lambda_k^2 - n_k^2)^{1/2}. \quad (9)$$

Таким образом, при движении по линии равного значения до пересечения с осью ординат (6) переходит в решение (8), причем $\Phi(\xi) \rightarrow \text{const}$.

Следовательно, задача об устойчивости решений уравнения (2) с учетом реального диапазона изменений параметров (5) и (5а) эквивалентна исследованию устойчивости решений уравнения (7).

Так как $\varphi(t) = u(\xi) \exp[-(2\lambda/\omega)\xi]$ и для выяснения устойчивости колебаний гравиметра по отношению к параметрическому резонансу решение $u(\xi)$ можно записать в виде (8), то

$$\varphi(t) \approx c_1 \exp[(\lambda^2 - n^2)^{1/2} - \lambda]t + c_2 \exp[-(\lambda^2 - n^2)^{1/2} + \lambda]t. \quad (10)$$

Ввиду того, что $n^2/(2\lambda^2) \ll 1$ и $(1 - n^2/(2\lambda^2))^{1/2} \approx 1 - n^2/(2\lambda^2)$, в решении (10) показатели в экспонентах будут $-n^2/(2\lambda)$ и $n^2/(2\lambda) - 2\lambda$, причем оба они отрицательны.

Следовательно, решение (10) уравнения (3а) является устойчивым. Соответственно уравнение (1) в смысле параметрического резонанса будет иметь только устойчивые решения.

Отметим, что здесь исследована устойчивость колебаний гравиметра по отношению к явлениям типа параметрического резонанса. При этом предполагалось, что амплитуда колебаний мала, а сами колебания чувствительной системы гравиметра под действием внешних периодических возмущений могут быть описаны линейным дифференциальным уравнением (1). Наконец, предполагалась простейшая форма демпфирующих сил.

Таким образом, при значениях коэффициента демпфирования $2\lambda = (10^3 - 10^4) \text{ сек}^{-1}$ в чувствительной системе гравиметра под действием типичных возмущающих ускорений (5а) экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний невозможно (см. также (3)).

Однако измерения гравитационного поля таким сильно демпфированным маятником будут искаженными и точность этих измерений могла бы быть повышена путем снижения коэффициента демпфирования. С точки зрения устойчивости колебаний (в смысле раскочки параметрических колебаний) 2λ допускает уменьшение величины до $\approx 40 \text{ сек}^{-1}$ при сохранении диапазона изменений других параметров маятника. Действительно, в этом случае глубина модуляции $h < 0$, причем $0,014 \ll |h| \ll 0,2$ и, следовательно, при оценке устойчивости решений уравнения (3а) по-прежнему справедлив переход к решению $\varphi(t)$ в форме (6). Показатели экспонент в (6) при $2\lambda \geq 40 \text{ сек}^{-1}$ и $n^2 \approx (50 - 150) \text{ сек}^{-2}$ остаются отрицательными. Постоянная времени гравиметра $T = 2\lambda/n^2$ с такими параметрами 2λ и n^2 будет заключаться в интервале $(0,3 - 1) \text{ сек}^{-1}$, что соответствует слабо демпфированному маятнику.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Кузиков, Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 5 (1958). ² В. А. Кузиков, Тр. Инст. физ. Земли АН СССР, № 8 (175) (1959). ³ В. А. Кузиков, И. А. Маслов и др., Деп. ВИНТИ, № 2869-71, 1971. ⁴ Н. В. Мак-Лаллан, Теория и приложение функций Матье, ИЛ, 1953. ⁵ В. А. Кузиков, Ю. Н. Смирнов, Сборн. Морские гравиметрические исследования, № 8, М., 1974.