Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

Е. А. ЛАРИОНОВ

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И ДВУКРАТНАЯ ПОЛНОТА НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ СИЛАМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. М. Никольским 7 I 1974)

1. Еще в прошлом столетии было начато исследование малых колебаний идеальной жидкости с учетом поверхностных сил ([1, 2]). В связи с развитием космической техники в последнее десятилетие этой задаче уделяется большое внимание ([3–10]). Рассмотрение движений жидкости, зависящих от времени как $e^{-\lambda t}$ — мы называем их нормальными — приводит к краевым задачам, спектры которых расположены определенным образом в комплексной плоскости в зависимости от того, какой из реальных параметров — μ (коэффициент вязкости) или σ (коэффициент поверхностного натяжения) учитывается в постановке этих задач. Если $\sigma=0$, то ([6–8]) собственные значения сгущаются к $\lambda=0$ и $\lambda=+\infty$; если $\mu=0$ и $\sigma=0$ — только к $\lambda=0$; если $\mu=0$ — только к бесконечности.

В 1966 г. на Международном математическом конгрессе С. Г. Крейн высказал гипотезу, что при учете вязкости и капиллярных сил собственные значения сгущаются лишь к бесконечности. Мы доказали справедливость ее и, более того, конечность числа невещественных собственных значений, означающую, что собственных колебаний жидкости при $\mu\neq0$, $\sigma\neq0$ может быть только конечное число. Мы показали двукратную полноту в $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ корневых векторов операторного пучка $L(\lambda)$, к которому сводится соответствующая краевая задача и возможность составления двух базисов Рисса в $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ из корневых векторов $L(\lambda)$ определенного вида. Это влечет разрешимость задачи

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=\nu\Delta\bar{u}+\nabla p_1,\quad \operatorname{div}\bar{u}=0\quad \text{в объеме } \Omega \text{ жидкости},$$

$$\bar{u}|_{\Gamma_1}=0\quad \text{на твердой стенке},$$

$$u_{1,3}+u_{3,1}=u_{2,3}+u_{3,2}=0\quad \text{на свободной поверхности } \Gamma_0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_1-2\nu u_{3,3})=\frac{\sigma}{\rho}(au_3-\Delta_0 u_3)$$

$$\bar{u}(0,\bar{x})=\bar{u}_0(\bar{x}),\quad p_1(0,\bar{x})=p_1^0(\bar{x})\quad \text{или}\quad \bar{u}'(0,\bar{x})=\bar{u}_0'(\bar{x});$$

здесь $\bar{u}$ — вектор скорости, p_1 — отклонение давления от равновесного, $\nu=\mu/\rho$, ρ — плотность жидкости $\bar{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$, Δ_0 — дифференциальный оператор Бельтрами — Лапласа. Функция $a=a\{\xi_1,\xi_2)$ известна и связана с равновесной поверхностью Γ_0, в окрестности которой введена криволинейная система координат $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, $\xi_3=0$ — уравнение Γ_0, $u_{i,k}=\partial u_i/\partial\xi_k$, $i,k=1,2,3$. Через $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ обозначено замыкание линеала $\mathring{\tilde{W}}{}_2^1(\Omega)$ гладких соленоидальных векторов $\tilde{v}$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_1, по норме $\|\bar{v}\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)}=(\tilde{v},\bar{v})^{1/2}$ пространства $\mathscr{L}_2(\Omega)$.

2. Для пространственных множителей нормальных движений $\bar{u}(t, \bar{x}) = e^{-\lambda t}\bar{u}(\bar{x})$, $p_1(t, \bar{x}) = e^{-\lambda t}p_1(\bar{x})$ получается [5] краевая задача

$$
\begin{gathered}
-\nu\Delta\bar{u}+\nabla p_1=\lambda\bar{u}, \quad \operatorname{div}\bar{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\
\bar{u}|_{\Gamma_1}=0, \\
\left.\begin{aligned}
&u_{1,3}+u_{3,1}=u_{3,2}+u_{2,3}=0 \\
&-p_1+2\nu u_{3,3}=\frac{\sigma}{\rho\lambda}(au_3-\Delta_0 u_3)
\end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma_0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Пусть $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ — замыкание $\mathring{\tilde{W}}_2^1(\Omega)$ по норме $W_2^1(\Omega)$. Вектор-функция $\bar{u}\in W_2^2(\Omega)\cap\tilde{W}_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением (2), если для любой функции $\bar{v}\in\tilde{W}_2^1(\Omega)$

$$
\lambda^2\rho(\bar{u}, \bar{v})-\lambda\mu E(\bar{u}, \bar{v})+\sigma(Bu_3, v_3)_0=0, \tag{3}
$$

где $E(\bar{u}, \bar{v})$ — известная [6] форма.

Выражением $B_0u_3=au_3-\Delta_0u_3$ в пространстве $\mathscr{L}_2(\Gamma_0)$ задается положительно определенный оператор Бельтрами — Лапласа B_0 с областью определения $W_2^2(\Gamma_0)$ и компактным обратным B_0^{-1}. Оператор B есть расширение B_0 на $W_2^{3/2}(\Gamma_0)$.

3. Форма $E(\bar{u}, \bar{v})$ выражается [7] через форму $(\bar{u}, \bar{v})$ при помощи положительно определенного оператора $A_0^{1/2}$, имеющего компактный обратный, равенством $E(\bar{u},\bar{v})=(A_0^{1/2}\bar{u}, A_0^{1/2}\bar{v})$. В силу теорем вложения $|(\varphi, v_3)_0|\leq c|\varphi|_{\mathscr{H}_2(\Gamma_0)}\{E(\bar{v}, \bar{v})\}^{1/2}$ для любой функции $\varphi\in W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$, а потому по теореме Рисса существует вектор $\bar{w}\in\tilde{W}_2^1(\Omega)$, реализующий равенство $(\varphi, v_3)_0=E(\bar{w}, \bar{v})$, определяющее линейный оператор T, с $W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$ на $\tilde{W}_{21}^1(\Omega)$ и

$$
(\varphi, v_3)_0=E(T\varphi, \bar{v}); \tag{4}
$$

здесь $\tilde{W}_{21}^1(\Omega)$ — ортогональное по форме $E(\bar{u}, \bar{v})$ дополнение в $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ к подпространству $\zeta(\Gamma)$, аннулируемое оператором Γ взятия следа v_3 функции $\bar{v}\in\tilde{W}_2^1(\Omega)$ на границе Γ_0. При помощи операторов $A_0^{1/2}$, T и Γ задача (2) сводится к пучку $L(\lambda)=\lambda^2G-\lambda I+H$, $G=\dfrac{\rho}{\mu}A_0^{-1}$, $H=\dfrac{\sigma}{\mu}A_0^{1/2}TB\Gamma A_0^{-1/2}$.

Оператор вложения $W_2^1(\Omega)$ в $\mathscr{L}_2(\Omega)$ имеет [11] конечный порядок $p<3+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и поэтому $p(\tilde{H}_1^{-1})=p(A_0^{-1/2})<3+\varepsilon$.

4. Любой вектор $\bar{x}\in\tilde{\mathscr{L}}_{22}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $\tilde{L}(0)\bar{x}=0$ и тем самым $0\in\sigma_c(\tilde{L})$ — непрерывному спектру пучка $\tilde{L}(\lambda)$. Если P_0 (P_1) — ортопроектор из $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ на $\tilde{\mathscr{L}}_{22}(\Omega)$ ($\tilde{\mathscr{L}}_{21}(\Omega)$), то $\bar{x}=P_0\bar{x}+P_1\bar{x}=\bar{x}_0+\bar{x}_1$ и

$$
\begin{gathered}
\lambda^2G(\bar{x}_0+\bar{x}_1)-\lambda(\bar{x}_0+\bar{x}_1)+\tilde{H}_1\bar{x}_1=0, \\
\lambda^2P_1GP_1\bar{x}_1+\lambda^2P_1GP_0\bar{x}_0-\lambda\bar{x}_1+\tilde{H}_1\bar{x}_1=0, \\
\lambda^2P_0GP_1\bar{x}_1+\lambda^2P_0GP_0\bar{x}_0-\lambda P_0\bar{x}_0=0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Из (5) имеем

$$
(P_0-\lambda P_0GP_0)\bar{x}_0=\lambda P_0GP_1\bar{x}_1. \tag{6}
$$

Оператор $P_0-\lambda P_0GP_0$ не имеет обратного лишь на последовательности $\{\lambda_n^0\}_1^\infty$ собственных чисел оператора $(P_0GP_0)^{-1}$.

Вне малых кругов с центрами в точках λ_n^0, $n=1, 2, \ldots$, имеем

$$\bar{x}_0=\lambda(P_0-\lambda P_0GP_0)^{-1}P_0GP_1\bar{x}_1, \tag{7}$$

$$\lambda^2P_1GP_1\bar{x}_1+\lambda^3P_1GP_0(P_0-\lambda P_0GP_0)^{-1}P_0GP_1\bar{x}_1-\lambda\bar{x}_1+\bar{H}_1\bar{x}_1=0, \tag{8}$$

$$\lambda^2\bar{H}_1^{-1}P_1GP_1\bar{x}_1+\lambda^3\bar{H}_1^{-1}P_1GP_0(P_0-\lambda P_0GP_0)^{-1}P_0GP_1\bar{x}_1-\lambda\bar{H}_1^{-1}\bar{x}_1+x_1=0. \tag{9}$$

Знак $\to$ ($\rightharpoonup$) означает сильную (слабую) сходимость при $n\to\infty$. Пусть существует последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ (ненулевых собственных чисел $\tilde{L}(\lambda)$, $\lambda_n\to 0$, $\{\bar{x}_n\}_1^\infty$ — соответствующая последовательность собственных векторов $\tilde{L}(\lambda)$, $\|\bar{x}_n\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)}$, а $\{\bar{x}_n'\}_1^\infty$ — ее подпоследовательность и $\bar{x}_n'\rightharpoonup\bar{x}_0$. Для всех λ_n' с $\operatorname{Re}\lambda_n'<1/\|P_0GP_0\|$ имеет место (7)—(9) и тем самым $\bar{x}_{1n}'\to$ $\to 0$. Тогда в силу (7) и $\bar{x}_{0n}'\to 0$. Итак, $\bar{x}_n'\to 0$, а это невозможно. Допустим $0\neq\lambda_0\in\sigma_c(\tilde{L})$. Тогда в $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ найдется некомпактная последовательность $\{\bar{x}_n\}_1^\infty$, $\|\bar{x}_n\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)}=1$, со свойством $\tilde{L}(\lambda_0)\bar{x}_n\to 0$ и мы приходим к соотношениям

$$(\lambda_0^2\bar{H}_1^{-1}P_1GP_1\bar{x}_{1n}+\lambda_0^2\bar{H}_1^{-1}P_1GP_0\bar{x}_{0n}-\lambda_0\bar{H}_1^{-1}\bar{x}_{1n}+\bar{x}_{1n})\to 0, \tag{10}$$

$$(\lambda_0P_0GP_1\bar{x}_{1n}+\lambda_0P_0GP_0\bar{x}_{0n}-\bar{x}_{0n})\to 0, \tag{11}$$

из которых следует, что существует подпоследовательность $\{\bar{x}_n'\}_1^\infty$, $\bar{x}_n'\to$ $\to x_0$. Это невозможно в силу того, что $\lambda_0\in\sigma_c(\tilde{L})$.

5. Ненулевые собственные числа задачи (2) и пучка $\tilde{L}(\lambda)$ совпадают. Точка $\lambda=0$ в спектр (2) не входит, ибо иначе существовали бы нормальные движения $\bar{u}(t, \bar{x})=\bar{u}(\bar{x})$, не зависящие от t, а таких собственных движений вязкой жидкости быть не может. Гипотеза С. Г. Крейна обоснована.

6. Для установления более тонкого факта — конечности числа невещественных собственных чисел задачи (2) — воспользуемся соотношением $p(\bar{H}_1^{-1})=p(A_0^{-1/2})$ и техникой из ([12]). Заменой $\lambda=-1/\bar{\lambda}-a$, $a>0$, получим из $\lambda^2G\bar{x}-\lambda\bar{x}+\bar{H}\bar{x}=0$ уравнение

$$\tilde{L}_a(\bar{\lambda})\bar{y}=\bar{\lambda}^2\bar{y}+\bar{\lambda}B\bar{y}+C\bar{y}=0, \tag{12}$$

где $B=F_a^{-1/2}(2aG+I)F_a^{-1/2}$, $C=F_a^{-1/2}GF_a^{-1/2}$, $F_a=a^2G+aI+\bar{H}$,

Пучку $\tilde{L}_a(\bar{\lambda})$ сопоставляется оператор

$$\mathscr{H}=\begin{pmatrix}0 & C^{1/2}\\ -C^{1/2} & -B\end{pmatrix},\quad (J\mathscr{H})^*=J\mathscr{H},\quad J=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}.$$

Максимальное J-неотрицательное $\mathscr{H}$-инвариантное подпространство $\mathscr{L}_+$ порождает ([12]) корень $Z=KC^{1/2}$ уравнения

$$Z^2+BZ+C=0. \tag{13}$$

Вычисления показывают компактность K, влекущую конечность числа невещественных собственных значений задачи (2).

7. Пусть $\mathscr{L}_{2a}$ — замыкание линейной оболочки собственных векторов $\mathscr{H}$, соответствующих векторам $\tilde{\mathscr{L}}_{2a}(\Omega)=F_a^{1/2}\tilde{\mathscr{L}}_{22}(\Omega)$. Оно J-отрицательно, и если $\mathscr{L}_{21}$ есть J-ортогональное дополнение к $\mathscr{L}_{2a}$ в $\mathscr{L}_2$, то $\mathscr{L}_2=$ $=\mathscr{L}_{2a}\oplus\mathscr{L}_{21}$. Используя, что $\dim\mathscr{L}_+^0<\infty$, получаем полноту в $\mathscr{L}_{21}$ корневых векторов сужения $\mathscr{H}_{21}$ оператора $\mathscr{H}$ на $\mathscr{L}_{21}$. Из полноты корневых векторов $\mathscr{H}$ в $\mathscr{L}_2$ следует двукратная полнота в $\tilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ системы корневых векторов (с.к.в.) $\tilde{L}_a(\bar{\lambda})$. Полнота с.к.в. $\mathscr{H}_{21}$ в $\mathscr{L}_{21}$ означает, что пространственные множители $\{\bar{u}_0^{(n)}\}$, $n=1, 2, \ldots$, нормальных движений и присоеди-

ненные к ним векторы $\overline{u}_k^{(n)}$, $k<\infty$, двукратно полны в таком смысле: существует решение $\overline{u}(t, \overline{x})$ (1), являющееся линейной комбинацией ее решений вида

$$\overline{u}_n(t,\overline{x}) = e^{-\lambda_n t}\left(\frac{t^k \overline{u}_0^{(n)}}{k!} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\overline{u}_1^{(n)} + \ldots + \overline{u}_k^{(n)}\right)$$

с начальными значениями $\overline{u}(0, \overline{x})$, $\overline{u}'(0, \overline{x})$, сколь угодно близкими к любым $\overline{u}_0 \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и $\overline{u}_0' \in \widetilde{W}_{21}(\Omega)$ соответственно. Из этого следует ([8]), что для любых $\overline{u}_0 \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и $p_1^0 \in \mathscr{L}_2(\Gamma_0)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется решение

$$\overline{u}_N(t,\overline{x}) = \sum_{n,k}^{N} c_{nk} e^{-\lambda_n t} \overline{u}_k^{(n)}$$

задачи (1), причем $\|\overline{u}_N(0, \overline{x}) - \overline{u}_0\|_{\widetilde{W}_1^2(\Omega)} < \varepsilon$ и одновременно функция

$$p_{1N}(t, \xi_1, \xi_2) = \sum_{n,k}^{N} c_{nk} \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j e^{-\lambda_n t} \Gamma \overline{u}_{k-j}^{(n)}}{\lambda_n^{j+1}}$$

удовлетворяет условию $\|p_{1N}(0, \xi_1, \xi_2) - p_1^0\|_{\mathscr{L}_2(\Gamma_0)} < \varepsilon$.

8. Оператор $Z_2 = -B - Z_1^*$ тоже есть корень уравнения (13). Корни Z_1 и Z_2 симметризуются оператором $S = B + Z_1 + Z_1^*$. Из соотношения между $p(B)$ и $p(C)$ следует представление $S = B(I+Q)$ с компактным Q и $\overline{R(Z_1)} = \overline{R(Z_2)} = \widetilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$. Привлекая результаты ([13]), получим полноту в $\mathscr{L}_2(\Omega)$ с.к.в. Z_1 и Z_2. Векторы $\overline{u}_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$; $\overline{u}_k^{(n)}$, $k < \infty$, отвечающие собственным числам первого (второго) рода и, возможно, конечному числу нейтральных собственных чисел ([14]) образуют базис Рисса в $\widetilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ $(\widetilde{\mathscr{L}}_{21}(\Omega))$. Это влечет разрешимость задачи для всех $\overline{u}_0 \in \widetilde{\mathscr{L}}_2(\Omega)$ и $p_1^0 \in \mathscr{L}_2(\Gamma_0)$, причем обобщенное решение делается рядом

$$\overline{u}(t,\overline{x}) = \sum_{n,k}^{\infty} c_{nk} e^{-\lambda_n t} \overline{u}_k^{(n)}.$$

Асимптотика чисел первого (второго) рода определяется оператором $A_0(\widetilde{H})$.

Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт
Москва

Поступило
28 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Rayleign*, Phil. Mag. (5), v. 34, 177 (1892). [2] *Г. Ламб.* Гидродинамика, М.–Л., 1947. [3] *Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев*, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость М., 1965. [4] *Н. Н. Моисеев, Ф. Л. Черноусько*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 5, т. 5, 1056 (1966). [5] *Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис*, Там же, т. 6, № 6, 1056 (1966). [6] *С. Г. Крейн*, ДАН, т. 159, № 2, 262 (1964). [7] *С. Г. Крейн, Г. Н. Лаптев*, Функц. анализ и его прилож., т. 2, в. 1, 40 (1968). [8] *Н. Г. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев*, Там же, т. 2, в. 2. 21 (1968). [9] *W. H. Reid*, Proc. London Math. Soc., v. 9, № 35, 388 (1959). [10] *Н. Д. Копачевский*, Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости, Сборн. ВЦ АН СССР, 1968, стр. 98. [11] *В. И. Параска*, Матем. сборн., 68 (110), 626 (1965). [12] *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*, Тр. Междунар. симп. по прим. теории функций в мех. сплошной среды, М., 1965. [13] *Е. А. Ларионов*, ДАН, т. 183, № 4 (1968). [14] *Е. А. Ларионов*, ДАН, т. 206, № 2 (1972).