Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

Дж. И. МАМЕДХАНОВ

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА КРИВЫХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 13 III 1974)

Пусть Γ — замкнутая или разомкнутая спрямляемая кривая Жордана; $l(\Gamma)$ — длина кривой Γ; функция $w=\varphi(z)$ отображает внешность кривой Γ, лежащей на плоскости z, на внешность γ (γ: $|w|=1$) в плоскости w, так что $\varphi(\infty)=\infty$; Γ_R, $R>1$,— линия уровня кривой Γ, соответствующая окружности $|w|=R$; D_R — область, ограниченная линией уровня Γ_R; $d(z, x)$ — функция точки $z\in\Gamma$, определяющая расстояние этой точки до кривой Γ_{1+x}, $x>0$; $L_p(\Gamma)$ — пространство функций $f(z)$ с конечной нормой

$$\|f\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}=\left(\frac{1}{l(\Gamma)}\int_\Gamma |f(z)|^p|dz|\right)^{1/p}, \quad p>0;$$

$A_p^{(n)}(D_R)$ — пространство функций, принадлежащих $L_p(\Gamma)$, аналитических в D_R, непрерывных на Γ_R и имеющих в бесконечно удаленной точке полюс порядка n; $\mathscr{P}$ — совокупность всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$.

Определим следующие классы кривых:

Замкнутая спрямляемая кривая Γ с отображающей функцией $\varphi(z)$ называется кривой типа (S), если

$$0<N_1\leqslant\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right|\leqslant N_2<\infty \quad (z \text{ и } t \text{ на и вне } \Gamma),$$

и кривой типа (α), если

$$|\varphi(t)-\varphi(z)|\leqslant A|t-z|^{1/\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant2, \quad t\in\Gamma_R, \quad z\in\Gamma.$$

Далее, замкнутая спрямляемая кривая называется кривой типа (u), если она состоит из дуг, имеющих непрерывную кривизну и в угловых точках z_j, $j=1, 2, \ldots, k$, с внешними углами, равными $u_j\pi$, удовлетворяются условия: $j=1, 2, \ldots, k$, $0<u_j<2$, $u_j\geqslant u_{j+1}$, причем $u=u_1$, если $u_j\geqslant1$ и $u=1$, если $u_1<1$.

Наконец, замкнутую спрямляемую кривую мы будем называть кривой типа (N), если она состоит из дуг, имеющих непрерывную кривизну, и угловых точек z_j, $j=1, 2, \ldots, k$, с внешними углами, равными $u_j\pi$, $0\leqslant u_j\leqslant2$, причем

$$N=\max_{1\leqslant j\leqslant k}(1;\ u_j).$$

Г. Сёге (7) показал, что если Γ состоит из конечного числа аналитических дуг и

$$\mu_n(z_0, \Gamma)=\sup_{P_n(z)\in\mathscr{P}}|P_n'(z_0)|$$

(где $z_0\in\Gamma$) с внешним углом $\alpha\pi$, $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$, то существуют числа $A'>0$ и $A>0$, зависящие от свойства кривой Γ (но не зависящие от n), такие, что

$$An^\alpha\leqslant\mu_n(z_0, \Gamma)\leqslant A'n^\alpha. \tag{1}$$

Подобного типа, но глобальный результат, связанный с емкостью множества, получен Поммеренке (6). С. Н. Мергелян (4) показал, что если

E — произвольный континиум, не разбивающий плоскость, то для $P_n(z) \in \mathscr{P}$, справедливо неравенство

$$|P_n'(z)| \leqslant \frac{CM}{d(1/n)}, \quad z \in E, \tag{2}$$

где $M = \max\limits_{z \in E} |P_n(z)|$, C — неопределенная (не зависящая от n) константа, $d(1/n) = \inf d(z, 1/n)$, причем нижняя грань берется по всем точкам z, принадлежащим границе E.

Для решения проблемы С. М. Никольского [5] в комплексной плоскости оказались пригодными более конкретные, нежели (1) и (2), неравенства, впервые доказанные В. К. Дзядыком [2]. Обзор работ о подобного типа неравенствах приводится в [3].

Впервые неравенства типа (2), которые мы в дальнейшем будем называть неравенствами типа Маркова — Бернштейна, были доказаны в метрике пространства $L_p(\Gamma)$ Д. Вестерном [9]. Он показал, что для $P_n(t) \in \mathscr{P}$ при $p \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$\|P_n'\|^*_{L_p(\Gamma)} \leqslant A_1 n \|P_n\|^*_{L_p(\Gamma)}, \tag{3}$$

если Γ — кривая типа (S);

$$\|P_n'\|^*_{L_p(\Gamma)} \leqslant A_2 n^{2\alpha-1} \|P_n\|^*_{L_p(\Gamma)}, \tag{4}$$

если Γ — кривая типа (α);

$$\|P_n'\|^*_{L_p(\Gamma)} \leqslant A_3 n^{u(1-1/p)} \|P_n\|^*_{L_p(\Gamma)}, \tag{5}$$

если Γ — кривая типа (u), где A_i, $i=1, 2, 3$, — неопределенные не зависящие от n константы.

Из этих неравенств лишь (3) точное в смысле порядка n.

В дальнейшем Г. Сёге и А. Зигмунд [8] улучшили в смысле порядка неравенства (4) и (5) для некоторых p, зависящих от раствора угла в точках стыка замкнутой кусочно-гладкой кривой, а М. И. Андрашко [1] доказала неравенства В. К. Дзядыка [2] в $L_p(\Gamma)$, когда Γ есть кусочно-гладкая замкнутая кривая с внешними углами $\alpha_j\pi$ в точках стыка z_j, удовлетворяющими условиям $1 \leqslant \alpha_j \leqslant 2$, $j=1, 2, \ldots, k$.

В этой работе на произвольной спрямляемой кривой для функций из $A_p^{(n)}(D_R)$ и $\mathscr{P}$ нами получен ряд неравенств типа Маркова — Бернштейна с точными порядками и определенными константами, из которых следуют все перечисленные выше результаты.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Если Γ — произвольная спрямляемая кривая* *, *то*

$$\|f^{(k)}\|^*_{L_p(\Gamma)} \leqslant \frac{ek!}{2\pi} \left[\frac{(1+1/n)\, l(\Gamma)}{l(\Gamma_{1+1/n})} \right]^{1/p} \delta_n^{(k)}(\Gamma) \|f\|^*_{L_p(\Gamma)} \tag{6}$$

для функций $f(z) \in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, $p \geqslant 1$, *и*

$$\|P_n^{(k)}\|^*_{L_p(\Gamma)} \leqslant \frac{ek!}{2\pi} \delta_n^{(k)}(\Gamma) \|f\|^*_{L_p(\Gamma)} \tag{7}$$

для $P_n(z) \in \mathscr{P}$, $p \geqslant 1$, *где*

$$\delta_n^{(k)}(\Gamma) = \sup_{z \in \Gamma} \int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{|dt|}{|t-z|^{k+1}}.$$

Из этой теоремы вытекают следующие утверждения.

* Если Γ — разомкнутая кривая, то интеграл берется по границе разрезанной вдоль Γ плоскости.

С л е д с т в и е 1. *Если* $f(z)\in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, $p\geqslant 1$, *то*

$$\|f'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\leqslant \frac{e}{d(1/n)}\left[\frac{(1+1/n)\,l(\Gamma)}{l(\Gamma_{1+1/n})}\right]^{1/p}\|f\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}, \tag{8}$$

и если $P_n(z)\in\mathscr{P}$, *то*

$$\|P_n'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\geqslant \frac{e}{d(1/n)}\|P_n\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}. \tag{9}$$

С л е д с т в и е 2. *Если* $\Gamma\subset(\alpha)$ *и* $f(z)\in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, *то*

$$\|f'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\leqslant \frac{e}{A^\alpha}\left[\frac{(1+1/n)\,l(\Gamma)}{l(\Gamma_{1+1/n})}\right]^{1/p} n^\alpha\|f\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}, \tag{10}$$

и если $P_n(z)\in\mathscr{P}$, *то*

$$\|P_n'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\leqslant \frac{e}{A^\alpha} n^\alpha\|P_n\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}. \tag{11}$$

С л е д с т в и е 3. *Если* $\Gamma\subset(N)$ *и* $f(z)\in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, *то справедливо неравенство*

$$\|f'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\leqslant Cn^N\|f\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}, \tag{12}$$

где C — абсолютная константа. Это неравенство является улучшением и обобщением неравенства (5).

С л е д с т в и е 4. *Если Γ — произвольная спрямляемая кривая, содержащая точки возврата (т. е. угловые точки с внешним углом, равным* 0 *или* 2π) *и* $f(z)\in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, $p\geqslant 1$, *то*

$$\|f'\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}\geqslant C_1 n^2\|f\|^{\bullet}_{L_p(\Gamma)}, \tag{13}$$

где C_1 — абсолютная константа.

Имеет место также следующая

Т е о р е м а 2. *Если Γ — произвольная кусочно-гладкая спрямляемая кривая и* $f(z)\in A_p^{(n)}(D_{1+1/n})$, *то при* $p\geqslant 1$

$$\|d^k(z,1/n)f^{(k)}(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant C_2\|f(z)\|_{L_p(\Gamma)}, \tag{14}$$

где C_2 — абсолютная константа.

Очевидно, неравенства (12), (13) и (14) верны и для $P_n(z)\in\mathscr{P}$.

Отметим, что в случае, когда Γ есть окружность или прямолинейный отрезок вещественной оси, из приведенных выше неравенств немедленно следуют, с точностью до постоянного множителя, известные неравенства Маркова — Бернштейна.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. И. Андрашко*, Укр. матем. журн., т. 16, № 4 (1964). [2] *В. К. Дзядык*, Изв. АН СССР сер. матем., т. 23 (1959). [3] *В. К. Дзядык*, Укр. матем. журн., т. 21, № 2 (1969). [4] *С. Н. Мергелян*, Тр. матем. инст. В. А. Стеклова, т. 37 (1951). [5] *С. М. Никольский*, Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, т. 3, 1960. [6] *Ch. Pommerenke*, Michigan Math. J., v. 6, № 4, 373 (1959). [7] *G. Szego*, Math. Zs., B. 23, 45 (1925). [8] *G. Szego, A. Zygmund*, J. Anal. Math., v. 3, 225 (1954). [9] *D. W. Western*, Duke Math. J., v. 15, № 3, 839 (1948).