

В. В. ВЬЮГИН

О ВЕРХНИХ ПОЛУРЕШЕТКАХ НУМЕРАЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 15 I 1974)

А. Х. Лахлан получил в работах ^(2, 3) некоторые описания начальных сегментов верхних полурешеток обыкновенных и р. п. (рекурсивно перечислимых) m -степеней. В этой заметке предлагаются некоторые аналогичные результаты для сегментов верхних полурешеток нумераций произвольных не более чем счетных множеств и сегментов верхних полурешеток вычислимых нумераций классов р. п. множеств.

Так же как в ⁽³⁾, под порядковой структурой мы будем понимать пару (P, \leq) , где P — множество натуральных чисел, \leq — транзитивное и рефлексивное отношение на P . Порядковая структура (P, \leq) конечная, если P — конечное множество. Ассоциированным с порядковой структурой (P, \leq) частично упорядоченным множеством называется пара (Q, \leq) , где Q — множество всех классов, на которые P разбивается отношением эквивалентности $x \equiv y \Leftrightarrow x \leq y \& y \leq x$, а \leq — частичный порядок на Q , индуцированный отношением \leq . Последовательность порядковых структур $\{(P_i, \leq_i)\}$ называется возрастающей, если $P_i \subseteq P_{i+1}$ для всех i и $x \leq_i y \Rightarrow x \leq_{i+1} y$ для всех $x, y \in P_i$. Пределом такой последовательности называется порядковая структура (P_ω, \leq_ω) , где $P_\omega = \bigcup_{i \geq 0} P_i$

и $x \leq_\omega y \Leftrightarrow \exists i (x \leq_i y)$ для $x, y \in P_\omega$. Пусть (P, \leq) и (P^*, \leq^*) — порядковые структуры. (P^*, \leq^*) называется кондеалом (P, \leq) , если $P^* \subseteq P$ и для всех $x, y \in P$ из $x \in P^*$ и $x \leq y$ следует $y \in P^*$, а \leq^* является ограничением \leq на P^* .

1. Пусть S — непустое не более чем счетное множество, $(L(S), \leq)$ — верхняя полурешетка произвольных нумераций S ($L(S)$ — множество всех классов эквивалентных нумераций S , \leq — частичный порядок на $L(S)$, индуцированный отношением сводимости нумераций ⁽¹⁾). В этой части изучается структура сегментов $(L(S), \leq)$ вида (L_{ab}, \leq_{ab}) , где $a, b \in L(S)$, $a \leq b$, $L_{ab} = \{x \mid x \in L(S) \& a \leq x \leq b\}$, \leq_{ab} — ограничение \leq на L_{ab} , а также сегментов вида (L_a, \leq_a) , где $a \in L(S)$, $L_a = \{x \mid x \in L(S) \& x \leq a\}$, \leq_a — ограничение \leq на L_a . Сегменты второго типа называются начальными.

Теорема 1. Пусть S — непустое не более чем счетное множество, $a, b \in L(S)$, $a \leq b$ и L — непустая верхняя полурешетка, изоморфная сегменту (L_{ab}, \leq_{ab}) .

Тогда L удовлетворяет следующему условию: существует возрастающая последовательность конечных порядковых структур $\{(D_i, \leq_i)\}$ с пределом (D_ω, \leq_ω) такая, что ассоциированное с (D_ω, \leq_ω) частично упорядоченное множество изоморфно L и выполнены условия:

- 1) $\{0, 1\} \subseteq D_i$, $0 \leq_i 1$, для любого i и для всех $x \in D_i$ $0 \leq_i x$, $x \leq_i 1$;
- 2) для всякого i ассоциированное с (D_i, \leq_i) частично упорядоченное множество, которое обозначим L_i , является дистрибутивной решеткой;
- 3) если $x, y, z \in D_i$ и z представляет объединение в L_i элементов, представленных x и y , то z также представляет объединение в L_{i+1} элементов, представленных x и y .

В ^(2, 3) показано, что непустая верхняя полурешетка L изоморфна начальному сегменту m -степеней тогда и только тогда, когда она удовлетворяет заключению этой теоремы.

Теорема 2. Пусть S не более чем счетно и содержит не менее двух элементов, $a \in L(S)$ и L — верхняя полурешетка, удовлетворяющая заключению теоремы 1.

Тогда существует $b \in L(S)$ такое, что $a \leq b$ и сегмент (L_{ab}, \leq_{ab}) изоморфен L .

Теорема 3. Пусть S — счетное множество.

Тогда непустая верхняя полурешетка F изоморфна начальному сегменту $(L(S), \leq)$ тогда и только тогда, когда существует верхняя полурешетка L , удовлетворяющая заключению теоремы 1, такая, что F изоморфна некоторому коидеалу L .

Если S конечно, то $L(S)$ содержит наименьший элемент, поэтому, если S конечно и содержит не менее двух элементов, то начальные сегменты $(L(S), \leq)$ описываются теоремами 1 и 2.

2. Пусть \mathfrak{A} — вычислимый класс р. п. множества, $(L_B(\mathfrak{A}), \leq)$ — верхняя полурешетка вычислимых нумераций класса \mathfrak{A} ($L_B(\mathfrak{A})$ — множество всех классов эквивалентных вычислимых нумераций \mathfrak{A} , \leq — частичный порядок на $L_B(\mathfrak{A})$, индуцированный отношением сводимости нумераций). В этой части изучается структура сегментов $(L_B(\mathfrak{A}), \leq)$ вида (L_{ab}, \leq_{ab}) и (L_a, \leq_a) , которые определяются аналогично тому, как это делалось в первой части. Основным результатом этой части является характеристика начальных сегментов верхней полурешетки вычислимых нумераций класса всех р. п. множеств.

Теорема 4. Пусть \mathfrak{A} — вычислимый класс р. п. множеств, $a, b \in L_B(\mathfrak{A})$, $a \leq b$ и L — непустая верхняя полурешетка, изоморфная сегменту (L_{ab}, \leq_{ab}) .

Тогда L удовлетворяет следующему условию: существует возрастающая последовательность конечных порядковых структур $\{(D_i, \leq_i)\}$ с пределом (D_ω, \leq_ω) , такая, что L изоморфна ассоциированному с (D_ω, \leq_ω) частично упорядоченному множеству, выполнены условия 1)–3) теоремы 1 и, кроме того:

- 4) $\{D_i\}$ — строго вычислимая последовательность конечных множеств;
- 5) существует рекурсивное отношение R такое, что $x \leq_i y \Leftrightarrow \forall u \exists v R(i, x, u, v)$ при $x, y \in D_i$;
- 6) существуют рекурсивные функции \cap и \cup такие, что для всех i, x, y таких, что $x, y \in D_i$, будет $\cap(i, x, y), \cup(i, x, y) \in D_i$ и $\cap(i, x, y), \cup(i, x, y)$ представляют соответственно пересечение и объединение в L_i элементов, представленных x и y .

Заметим, что из доказательства этой теоремы можно считать, что $D_\omega = N$, где N — множество всех натуральных чисел.

В ⁽³⁾ показано, что непустая верхняя полурешетка L изоморфна начальному сегменту р. п. m -степеней тогда и только тогда, когда она удовлетворяет заключению этой теоремы.

Теорема 5. Пусть \mathfrak{A} — вычислимый класс р. п. множеств такой, что существует вычислимая нумерация ν некоторого его подкласса такая, что $\nu(0) \subset \nu(1) \subset \dots$ и $\bigcup_{i \geq 0} \nu(i) \neq \mathfrak{A}$.

Тогда для любых $a \in L_B(\mathfrak{A})$ и верхней полурешетки L , удовлетворяющей заключению теоремы 4, существует $b \in L_B(\mathfrak{A})$ такое, что $a \leq b$ и сегмент (L_{ab}, \leq_{ab}) изоморфен L .

Теорема 6. Пусть \mathfrak{A} — вычислимый класс р. п. множеств и L — начальный сегмент $(L_B(\mathfrak{A}), \leq)$.

Тогда существует возрастающая последовательность конечных порядковых структур $\{(D_i, \leq_i)\}$ с пределом (N, \leq_ω) и коидеал (D^*, \leq_{ω^*}) структуры (N, \leq_ω) такие, что ассоциированное с (D^*, \leq_{ω^*}) частично упорядоченное множество изоморфно L , выполнены условия 1)–6), и если класс \mathfrak{A} имеет однозначную вычислимую нумерацию, то выполнено

7) существует рекурсивное отношение R^* такое, что для всех x

$$x \in D^* \leftrightarrow \exists i \forall n \geq i \exists m \forall k \exists l R^*(x, n, m, k, l)$$

и для всех x, y , если $x \leq_{\omega} y$, то для всех n , кроме, быть может, конечного числа, будет

$$\exists m \forall k \exists l R^*(x, n, m, k, l) \Rightarrow \exists m \forall k \exists l R^*(y, n, m, k, l).$$

Если \mathfrak{A} — дискретный класс (т. е. для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существует конечное множество $D \subseteq A$ такое, что для всякого $B \in \mathfrak{A}$, если $B \neq A$, то $D \not\subseteq B$), то выполнено

7') существует рекурсивное отношение R^* такое, что

$$x \in D^* \leftrightarrow \exists i \forall n \exists m R^*(x, i, n, m).$$

Если \mathfrak{A} — класс конечных множеств, то выполнено

7'') существует рекурсивное отношение R^* такое, что

$$x \in D^* \leftrightarrow \exists i \forall n \exists m \forall k R^*(x, i, n, m, k).$$

Следующая теорема дает обращение одного из этих условий. Буквой F обозначаем класс всех р. п. множеств.

Теорема 7. Пусть непустая верхняя полурешетка L удовлетворяет следующему условию: существует возрастающая последовательность конечных порядковых структур $\{(D_i, \leq_i)\}$ с пределом (N, \leq_{ω}) и (D^*, \leq_{ω}^*) — идеал структуры (N, \leq_{ω}) такие, что L изоморфна ассоциированному с (D^*, \leq_{ω}^*) частично упорядоченному множеству и выполнены условия 1)–7). Тогда существует начальный сегмент $(L_B(F), \leq)$, изоморфный L .

Так как класс F имеет однозначную вычислимую нумерацию⁽⁴⁾, из теорем 6 и 7 получаем

Следствие 1. Непустая верхняя полурешетка L изоморфна начальному сегменту $(L_B(F), \leq)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию теоремы 7.

Из этих же теорем можно получить

Следствие 2. Непустая конечная верхняя полурешетка изоморфна некоторому начальному сегменту верхней полурешетки вычислимых нумераций некоторого класса р. п. множеств тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторому идеалу некоторой конечной дистрибутивной решетки.

Нетрудно построить верхнюю полурешетку, удовлетворяющую условию теоремы 7 и не изоморфную ни одной из полурешеток, удовлетворяющих тому же условию, с тем лишь исключением, что в нем 7) заменено на 7''). Отсюда получаем

Следствие 3. В верхней полурешетке $(L_B(F), \leq)$ имеется начальный сегмент, не изоморфный ни одному из начальных сегментов верхней полурешетки вычислимых нумераций любого класса конечных множеств, любого дискретного класса.

Остается невыясненным, существует ли верхняя полурешетка вычислимых нумераций, некоторый начальный сегмент которой не изоморфен никакому начальному сегменту $(L_B(F), \leq)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Л. Ершов, Теория нумераций, ч. I, Новосибирск, 1969. ² A. H. Lachlan, Canad. J. Math., v. 22, № 1 (1970). ³ A. H. Lachlan, Алгебра и логика, т. 11, № 3 (1972). ⁴ R. M. Friedberg, J. Symb. Logic, v. 23 (1958).