2. Н. С. Иванова, В. И. Остроумов, Р. А. Филов. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Докл. сов. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 452.
3. E. W. Baker, S. Katcoff. Phys. Rev., **126**, 729 (1962).
4. А. И. Обухов. В сб. «Физика деления атомных ядер». М., Госатомиздат, 1962, стр. 217.
5. А. И. Обухов. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 1042 (1958).
6. D. Le Conteur. Proc. Phys. Soc., **A63**, 259 (1950).
7. Э. Сегре. Экспериментальная ядерная физика. Т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 154.
8. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
9. В. И. Остроумов, Р. А. Филов. «Приборы и техника эксперимента», **2**, 44 (1957).
10. В. П. Шамов, О. В. Ложкин. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **29**, 286 (1955).

УДК 539.173.84

Вычисление энергии возбуждения осколков деления

Г. И. Бабкин

В работе рассматривается вопрос о дополнительной энергии возбуждения осколков в процессе разлета. Показано, что эта энергия составляет величину ~ 1 *Мэв*. На основании вычисленной энергии возбуждения осколков оценивается число вторичных нейтронов. Результаты вычислений сравниваются с экспериментальными данными.

Вопрос о количестве вторичных нейтронов деления имеет большое практическое значение. Для оценки этой величины необходимо определить энергию возбуждения ядер-осколков.

При делении тяжелых ядер нейтронами помимо ядер-осколков испускаются вторичные быстрые нейтроны, способные в свою очередь вызывать деление. Это так называемые мгновенные нейтроны, которые испускаются осколками непосредственно после процесса расщепления исходного ядра быстрее чем за 10^{-15} *сек*. Среднее число нейтронов, испускаемых на один акт деления, является важной характеристикой этого процесса.

Энергия, выделяющаяся при делении, распределяется между кинетической энергией разлетающихся осколков и их энергией возбуждения. Экспериментальные данные показывают, что средняя кинетическая энергия осколков деления не зависит существенно от энергии возбуждения делящегося ядра. Это означает, что почти вся энергия возбуждения делящегося ядра идет на возбуждение осколков. Ясно, что величина энергии возбуждения осколков полностью определяет среднее число мгновенных нейтронов деления.

Вопрос о вычислении энергии возбуждения осколков деления рассматривался в работе [1] на основе модели жидкой капли с введением некоторой вязкости. В предположении, что уравнения поверхности осколков имеют вид

$$r_i(\Theta_i) = R_i\left[1 + \sum_{n=0}^{3} \alpha_{ni} P_n(\cos\Theta_i)\right]$$

(где $R_i = r_0 A_i^{1/3}$, $r_0 = 1{,}22\cdot 10^{-13}$ *см* $i = 1,2$), были выведены классические уравнения движения для переменных α_{2i}, α_{3i}, $a = d/r_0$ (d — расстояние между центрами тяжести осколков). В работе [2] величина энергии взаимодействия осколков вычислена в квадратичном приближении по α_{2i}, α_{3i} и найдены начальные условия для переменных α_{2i}, α_{3i} a. Начальные значения скоростей $\dot\alpha_{2i}$, $\dot\alpha_{3i}$, $\dot a$ при пороговом и спонтанном делениях получены в работе [1].

Рассмотрим предельный случай малых возбуждений, когда силами трения можно пренебречь. При этом энергия возбуждения осколков будет равна энергия колебаний при $a \to \infty$. Как показывают вычисления, добавочная энергия возбуждения осколков при разлете, обусловленная их кулоновским взаимодействием, сравнима с величиной $\hbar\omega$ кванта поверхностных колебаний осколков. В связи с этим представляет интерес не классическое, а квантовое рассмотрение этого вопроса.

Однако уменьшение кинетической энергии разлетающихся осколков мало́, поэтому влиянием возбуждения на движение осколков можно пренебречь. При этом можно считать, что осколки движутся по классической траектории:

$$a = \delta(\operatorname{ch}\xi + 1); \quad \tau = \varepsilon(\operatorname{sh}\xi + \xi);$$

$$\delta = \frac{a_0}{2}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\mu a_0^3}{8Z_1Z_2}}.$$

(Мы пренебрегаем начальной скоростью осколков, так как $\dot{a}_0^2 \ll \frac{2Z_1Z_2}{\mu a_0}$.) Аналогичная постановка вопроса встречается при рассмотрении кулоновского возбуждения ядер [3, 4]. Это оправдывается тем, что параметр квазиклассичности движения осколков

$$\frac{Z_1Z_2e^2}{hv} \gg 1.$$

Гамильтониан нашей системы можно записать в виде

$$H(a, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}) = -\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2\zeta}\left(\frac{1}{\mu_{2i}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha_{2i}^2}+\frac{1}{\mu_{3i}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha_{3i}^2}\right)+ k_{2i}^2\alpha_{2i}^2+k_{3i}^2\alpha_{3i}^2\right]+W(a, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}),$$

где $\zeta = \frac{mr_0e^2}{h^2}$ — безразмерный параметр; $W = V_{\text{вз}} - Z_1Z_2a^{-1}$. Будем считать W возмущающим оператором. В работе [3] показано, что теория возмущений применима к подобной задаче при условии

$$\frac{\mu v^2}{2} < \frac{Z_1Z_2}{A_1^{1/3}+A_2^{1/3}},$$

которое в нашем случае выполняется (расстояние между центрами тяжести осколков в момент разрыва шейки больше суммы радиусов осколков).

В невозмущенной задаче переменные легко разделяются, так что каждое стационарное состояние системы характеризуется четырьмя квантовыми числами: n_{21}, n_{22}, n_{31}, n_{32}. Энергия каждого состояния определяется из равенства

$$E_{n_{2i}n_{3i}} = \zeta^{-1/2}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(n_{2i}+\frac{1}{2}\right)\omega_{2i}+\left(n_{3i}+\frac{1}{2}\right)\omega_{3i}\right].$$

(E — в единицах e^2/r_0).

Используя первое приближение нестационарной теории возмущений, получим вероятности перехода с уровня n_{2i}^0, n_{3i}^0 на уровень n_{2i}, n_{3i}

$$P_{n_{2i}n_{3i};\, n_{2i}^0n_{3i}^0} = \zeta\left|\langle W(\omega)\rangle_{n_{2i}n_{3i};\, n_{2i}^0n_{3i}^0}\right|^2.$$

Здесь

$$\langle W(\omega)\rangle = \int_0^\infty \langle W(\tau)\rangle e^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{1}$$

где $\langle W(\tau)\rangle$ — матричный элемент энергии возмущения для соответствующего перехода; $\omega = \zeta^{1/2}\Delta E_{n_{2i}n_{3i};\, n_{2i}^0n_{3i}^0}$ — частота перехода. Так как выражение для W содержит степени α_{ki} не выше второй, то возможны переходы с $\Delta n = \pm 2$ не более чем в одном осцилляторе или с $\Delta n = \pm 1$ не более чем в двух осцилляторах одновременно.

В уравнении (1) перейдем к интегрированию по параметру ξ:

$$\langle W(\omega)\rangle = \varepsilon\int_0^\infty \langle W(\xi)\rangle e^{i\omega\varepsilon(\operatorname{sh}\xi+\xi)}(1+\operatorname{ch}\xi)\, d\xi.$$

При этом получаются интегралы вида

$$M_m(z) = \int_0^\infty e^{iz(\operatorname{sh}\xi+\xi)}\frac{d\xi}{(\operatorname{ch}\xi+1)^{m-1}}, \tag{2}$$

где $z = \varepsilon\zeta^{1/2}\Delta E$; $m = 3, 4, 5, 6, 7$. Свойства этих интегралов рассмотрены в приложении. Там же приведена таблица значений действительных и мнимых частей этих интегралов для указанных значений m; параметр z изменяется в пределах от 0 до 10. Обозначим

$$ReM_m(z) = R_m(z),$$
$$ImM_m(z) = I_m(z).$$

Для средней энергии перехода получим

$$\overline{E} = \sum_{n_{2i}n_{3i}} \Delta E_{n_{2i}n_{3i};\, n_{2i}^0n_{3i}^0} P_{n_{2i}n_{3i};\, n_{2i}^0n_{3i}^0}, \tag{3}$$

где сумма берется по всем возможным переходам. Наиболее вероятными оказываются переходы с изменением на единицу n_{21} или n_{22}. Поэтому из выражения (3) можно получить приближенную формулу:

$$\overline{E} \approx \frac{\gamma_3^2}{2}\zeta\left[\Delta E_{21}I_3^2(\varepsilon\omega_{21})\beta_{11}^2Z_{21}^2 + \Delta E_{22}I_3^2(\varepsilon\omega_{22})\beta_{12}^2Z_{22}^2\right],$$

где

$$\gamma_m = \frac{Z_1Z_2\varepsilon}{\delta^m};\quad \beta_{1i} = \frac{3}{5}A_i^{2/3};\quad \omega_{2i}^2 = \frac{2k_{2i}^2}{\mu_{2i}}.$$

Чтобы определить среднее число нейтронов, испускаемых при делении, по энергии возбуждения осколков, необходимо знать спектр нейтронов. При вычислении спектра нейтронов деления обычно считают, что нейтроны испускаются движущимися осколками. Это предположение хорошо согласуется с экспериментом. Кроме того, обычно предполагается изотропность испускания нейтронов в системе

Таблица 1

Результаты вычисления ΔU, E_∞ и $\bar{\nu}$* при пороговом и спонтанном делениях

Ядро	A_1/A_2	ΔU, *Мэв*	Средняя энергия перехода, *Мэв*	E_∞, *Мэв*		$\bar{\nu}$		$\bar{\nu}$ (экспериментальное)		
				пороговое	спонтанное	пороговое	спонтанное	пороговое	спонтанное	экстраполированное, из работы [6]
Th^{230}	0,606	—11,42	0,46	32,05	18,82	2,0	1,5	2,13	—	1,24
U^{234}	0,680	—5,70	0,52	30,50	18,93	2,5	1,6	2,52	—	1,63
U^{236}	0,685	—5,78	0,51	29,83	18,36	2,5	1,7	2,47	—	1,58
Pu^{240}	0,719	—0,33	0,56	31,13	21,16	2,8	1,6	2,92	2,23	2,23
Pu^{242}	0,725	1,53	0,54	25,97	18,59	2,8	1,7	3,03	2,18	2,28
Cm^{242}	0,775	1,19	0,59	32,21	25,06	3,2	2,3	—	2,65	2,59
Cm^{244}	0,758	1,64	0,59	27,23	19,41	3,3	2,2	—	2,84	2,82
Cf^{252}	0,752	6,50	0,60	27,47	20,18	3,5	2,8	—	3,82	3,84

* Значения величины $\bar{\nu}$ приведены для случая симметричного деления.

центра масс осколков. В работе [5] проведены вычисления спектра и средней кинетической энергии нейтронов в предположении, что нейтроны испускаются из осколков за время $10^{-20} \div 10^{-14}$ *сек*, когда осколки уже достигли максимальной скорости. Для полной энергии, уносимой нейтронами, получено выражение

$$[E_b + 0{,}621\,(\bar{\nu}+1)^{1/2}]\,\bar{\nu},$$

где E_b — энергия связи нейтрона. Тогда энергия возбуждения осколков

$$E = 8{,}0 + [E_b + 0{,}621\,(\bar{\nu}+1)^{1/2}]\,\bar{\nu},$$

где средняя энергия мгновенных γ-лучей принята равной 8 *Мэв* [6]. В этой работе значения E_b определялись усреднением по распределению осколков по массам и зарядам. При усреднении принималось во внимание соотношение $\bar{\nu}_л/\bar{\nu}_т = 1{,}3$, которое распространялось на все ядра; $M_т$ принималась равной 140. Массы ядер вычислялись по формуле Ферми с учетом оболочечных эффектов.

Для проведения конкретных расчетов были выбраны ядра, для которых данные о распределении масс осколков приведены в работе [7]. Распределение масс и зарядов принималось одинаковым для спонтанного и порогового делений. Вычислялась величина $\Delta U\,(A_1/A_2) = U\,(A_1/A_2) - U\,(1)$, определяющая выигрыш энергии в случае асимметричного деления, а также величина энергии возбуждения осколков в момент разрыва шейки и добавочная энергия возбуждения осколков при разлете. Результаты вычислений даны в табл. 1. Величина энергии кулоновского возбуждения осколков оказалась меньше величины добавочной энергии возбуждения осколков, вычисленной классически. Поэтому при приближенных расчетах эту часть энергии можно не учитывать.

Значения $\bar{\nu}$ удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов и усредненными величинами, полученными в работе [6] при введении некоторых полуэмпирических коэффициентов. Следует отметить, что большая неточность вносится на первом этапе вычислений: из-за грубости формулы Вайцзеккера для величины ΔU получаются неточные значения. В результате вычисления, проведенные для симметричного деления, лучше согласуются с экспериментальными данными, чем в случае асимметричного деления.

Численные расчеты проводились на цифровой электронно-счетной машине «Стрела» Вычислительного центра АН СССР.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Б. Т. Гейликману за постановку задачи и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обсудим свойства функций, определяемых интегралами (2). Для численного интегрирования этих выражений удобно сдвинуть путь интегрирования в комплексную плоскость [4]. Получим:

$$I'_m(z) = \int_0^{\pi/2} e^{-z(\sin y + y)} \frac{dy}{(\cos y + 1)^{m-1}}\,;$$

$$R_m(z) = \int_0^{\infty} e^{-z(\operatorname{ch} y + \pi/2)} f_{m-1}(y)\,dy;$$

Таблица 2

Численные значения $R_m(z)$

z	R_3		R_4		R_5		R_6		R_7	
0,0	3,333	—1	1,333	—1	5,714	—2	2,540	—2	1,154	—2
0,1	3,144	—1	1,298	—1	5,623	—2	2,511	—2	1,144	—2
0,2	2,781	—1	1,210	—1	5,368	—2	2,427	—2	1,114	—2
0,3	2,372	—1	1,092	—1	4,993	—2	2,298	—2	1,067	—2
0,4	1,976	—1	9,601	—2	4,542	—2	2,136	—2	1,006	—2
0,5	1,618	—1	8,278	—2	4,054	—2	1,952	—2	9,341	—3
0,6	1,308	—1	7,024	—2	3,561	—2	1,757	—2	8,560	—3
0,7	1,046	—1	5,881	—1	3,084	—2	1,561	—2	7,749	—3
0,8	8,299	—2	4,870	—2	2,640	—2	1,370	—2	6,936	—3
0,9	6,538	—2	3,996	—2	2,236	—2	1,190	—2	6,145	—3
1,0	5,121	—2	3,252	—2	1,877	—2	1,024	—2	5,392	—3
1,2	3,097	—2	2,110	—2	1,291	—2	7,391	—3	4,050	—3
1,4	1,845	—2	1,340	—2	8,655	—3	5,186	—3	2,954	—3
1,6	1,087	—2	8,361	—3	5,679	—3	3,554	—3	2,102	—3
1,8	6,338	—3	5,143	—3	3,661	—3	2,388	—3	1,464	—3
2,0	3,668	—3	3,127	—3	2,326	—3	1,577	—3	1,001	—3
3,0	2,198	—4	2,291	—4	2,048	—4	1,643	—4	1,215	—4
4,0	1,211	—5	1,470	—5	1,517	—5	1,392	—5	1,167	—5
5,0	6,348	—7	8,723	—7	1,012	—6	1,038	—6	9,672	—7
6,0	3,223	—8	4,911	—8	6,291	—8	7,093	—8	7,242	—8
7,0	1,599	—9	2,664	—9	3,718	—9	4,554	—9	5,036	—9
8,0	7,796	—11	1,405	—10	2,115	—10	2,788	—10	3,311	—10
9,0	3,751	—12	7,249	—12	1,161	—11	1,644	—11	2,082	—11
10,0	1,786	—13	3,675	—13	6,297	—13	9,413	—13	1,263	—12

Примечание. Цифры справа в каждой колонке табл. 2 и 3 означают степень 10, на которую нужно умножить соответствующее число.

Таблица 3

Численные значения $I_m(z)$

z	I_3		I_4		I_5		I_6		I_7	
0,0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0	0,000	0
0,1	6,919	—2	2,097	—2	7,289	—3	2,580	—3	6,800	—4
0,2	1,171	—1	3,882	—2	1,412	—2	5,364	—3	1,920	—3
0,3	1,470	—1	5,250	—2	1,989	—2	7,820	—3	3,040	—3
0,4	1,633	—1	6,210	—2	2,444	—2	9,890	—3	4,004	—3
0,5	1,698	—1	6,812	—2	2,779	—2	1,154	—2	4,812	—3
0,6	1,697	—1	7,122	—2	3,002	—2	1,278	—2	5,455	—3
0,7	1,652	—1	7,207	—2	3,129	—2	1,363	—2	5,941	—3
0,8	1,580	—1	7,126	—2	3,178	—2	1,414	—2	6,279	—3
0,9	1,493	—1	6,928	—2	3,164	—2	1,443	—2	6,488	—3
1,0	1,401	—1	6,655	—2	3,104	—2	1,434	—2	6,583	—3
1,2	1,217	—1	5,995	—2	2,894	—2	1,379	—2	6,511	—3

Продолжение табл. 3

z	I_3		I_4		I_5		I_6		I_7	
1,4	1,052	—1	5,307	—2	2,627	—2	1,283	—2	6,198	—3
1,6	9,128	—2	4,670	—2	2,353	—2	1,170	—2	5,759	—3
1,8	7,984	—2	4,114	—2	2,096	—2	1,056	—2	5,270	—3
2,0	7,054	—2	3,644	—2	1,867	—2	9,489	—3	4,784	—3
3,0	4,393	—2	2,242	—2	1,144	—2	5,842	—3	2,979	—3
4,0	3,210	—2	1,621	—2	8,192	—3	4,142	—3	2,096	—3
5,0	2,541	—2	1,278	—2	6,430	—3	3,234	—3	1,628	—3
6,0	2,106	—2	1,057	—2	5,307	—3	2,664	—3	1,338	—3
7,0	1,800	—2	9,026	—3	4,526	—3	2,269	—3	1,138	—3
8,0	1,573	—2	7,879	—3	3,948	—3	1,978	—3	9,911	—4
9,0	1,396	—2	6,993	—3	3,502	—3	1,754	—3	8,784	—4
10,0	1,256	—2	6,288	—3	3,148	—3	1,576	—3	7,891	—4

$$I''_m(z)=\int\limits_0^\infty e^{-z(\mathrm{ch}\,y+\pi/2)}\,\varphi_{m-1}(y)\,dy,$$

где f_m и φ_m — соответственно действительная и мнимая части выражения

$$\frac{e^{izy}}{(1+i\,\mathrm{sh}\,y)^m};\ I_m=I'_m+I''_m.$$

Полученные таким способом численные значения для $I_m(z)$ и $R_m(z)$ приведены в табл. 2,3. Из выражения (2) легко получить соотношения

$$\begin{aligned} R_m(-z)&=R_m(z);\\ I_m(-z)&=-I_m(z). \end{aligned} \tag{4}$$

При $z=0$ интегралы легко вычисляются. В частности, из (4) следует, что $I_m(0)=0$. Для $R_m(0)$ получаем:

$$R_3(0)=\frac{1}{3};\ R_4(0)=\frac{2}{15};\ R_5(0)=\frac{2}{35};$$

$$R_6(0)=\frac{8}{315};\ R_7(0)=\frac{8}{693}.$$

Эти значения использовались для контроля вычислений. При $z\to\infty$ $R_m(z)$ и $I''_m(z)$ убывают экспоненциально, основной вклад в этом случае вносит $I'_m(z)$. Оценивая этот интеграл методом Лапласа, получим

$$I_m\approx\frac{1}{2^m z};\quad z\gg 1.$$

Это асимптотическое выражение согласуется с результатами численных расчетов.

Поступила в Редакцию 9/VII 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Т. Гейликман. «Атомная энергия», 6, 298 (1959).
2. Б. Т. Гейликман. Там же, стр. 290.
3. К. А. Тер-Мартиросян. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 22, 284 (1952).
4. К. Альдер и др. В сб. «Деформация атомных ядер». М., Изд-во иностр. лит., 1958, стр. 9.
5. J. Terrel. Phys. Rev., 113, 527 (1959).
6. И. И. Бондаренко и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Докл. сов. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 438.
7. A. Smith et al. Proc. Second Intern. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy. V. 15. Geneva, U. N., 1959.

УДК 621.039.512.2

О некоторых нелинейных задачах теории ядерных реакторов

О. Б. Москалев

При расчетах реакторов на критичность необходимо учитывать связь между температурой в объеме реактора и потоком нейтронов. Для этого часто предполагают, что $k_{эфф}$ — функция мощности реактора. В работе предложен метод приближенного учета указанной связи с помощью некоторого функционала от потока (такой функционал может быть выражен через мощность, среднюю по реактору температуру и т. д.), так что ее учет с помощью $k_{эфф}$ — частный случай предлагаемого метода. Приводятся результаты расчета системы нелинейных уравнений, описывающих перенос нейтронов в одногрупповом диффузионном приближении в плоском реакторе и перенос тепла путем теплопроводности. Результаты анализируются с целью сравнения точного решения с приближенным.