

Н. Н. ГУДОВИЧ

**О ПОСТРОЕНИИ УСТОЙЧИВЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
ЛЮБОГО НАПЕРЕД ЗАДАННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ  
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 7 II 1974)

Предложенные в (1, 2) приемы построения устойчивых разностных схем требуют знания корней определяющих многочленов; кроме того, само существование устойчивых схем указанного там класса для любого порядка аппроксимации не установлено. В настоящей работе излагается метод блочной аппроксимации, позволяющий строить устойчивые разностные схемы любого наперед заданного порядка аппроксимации без какой-либо информации о корнях определяющих многочленов.

1°. Конечно-порожденная разностная схема. Рассмотрим задачу

$$u^{(n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t) u^{(r)}(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1,1)$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_p^{(r)} u^{(r)}(0) + \beta_p^{(r)} u^{(r)}(1) = \varphi_p, \quad p=0, 1, \dots, n-1, \quad (1,2)$$

где  $l_r, f$  — функция из  $C[0, 1]$  и  $\alpha_p^{(r)}, \beta_p^{(r)}, \varphi_p$  — вещественные числа. Задача (1,1), (1,2) считается однозначно разрешимой в  $C^n[0, 1]$  для любых  $f \in C[0, 1]$  и  $\varphi = \{\varphi_p\} \in R^n$ .

Пусть  $1/h$  — натуральное, и пусть  $t_i = ih, i=0, 1, \dots, 1/h$ , — узлы сетки на  $[0, 1]$ , а  $u^h = \{u_i^h\}_{i=0}^{1/h}$  — сеточная функция.

Заменим задачу (1,1), (1,2) разностной задачей

$$(\Delta^n u^h)_{i_q} + \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t_{i_q}) (\Delta^r u^h)_{i_q} = f(t_{i_q}), \quad q=0, 1, \dots, 1/h-n, \quad (1,3)$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_p^{(r)} (\Delta^r u^h)_0 + \beta_p^{(r)} (\Delta^r u^h)_{1/h} = \varphi_p, \quad p=0, 1, \dots, n-1; \quad (1,4)$$

здесь  $q$  — номер разностного уравнения в системе (1,3),  $i_q, 0 \leq i_q \leq 1/h$ , — номер одного из узлов сетки и

$$(\Delta^m u^h)_i = \frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^s a_j u_{i+j}^h \quad (1,5)$$

выражение с параметрами  $s, l, a_j, -s \leq l$ , удовлетворяющими условию

$$\sum_{j=-s}^l a_j v(t+jh)/h^m \rightarrow v^{(m)}(t) \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ для } \forall v \in C^m(R)$$

и естественному ограничению  $0 \leq i-s$  и  $i+l \leq 1/h$ . При этом для аппроксимации производной фиксированного порядка  $m$  в разных уравнениях системы (1,3), (1,4) используются разные наборы  $\{s, l, a_{-s}, \dots, a_l\}$ , однако предполагается, что эти наборы выбираются из конечного и не меняющегося с изменением  $h$  множества.

Последнее требование позволяет назвать рассматриваемую разностную схему конечно-порожденной, т. е. порожденной конечным множеством разностных аппроксимаций для производных.

Отметим, что числа  $i_q$  в (1,3) не предполагаются попарно различными, что позволяет включить в рассмотрение и случай, когда уравнение (1,1) аппроксимируется несколько раз в одном и том же узле.

Задачу (1,3), (1,4) можно записать в виде уравнения  $A_h u^h = F_h$  с оператором  $A_h$  из пространства  $C_h^n$  сеточных функций  $v^h = \{v_i^h\}_{i=0}^{1/h}$  с нормой

$$\|v^h\|_{C_h^n} = \max_{0 \leq m \leq n} \max_{0 \leq i \leq 1/h-m} |(\bar{\Delta}^m v^h)_i|, \quad (1,6)$$

где  $(\bar{\Delta}^m v^h)_i$  есть разностное отношение «вперед» порядка  $m$ ,

$$(\bar{\Delta}^m v^h)_i = \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j v_{i+j}^h,$$

в узле  $t_i$ , в пространство  $C_{0, 1, \dots, 1/h-n}$  наборов вида  $(g^h, \psi) = (\{g_q^h\}_{q=0}^{1/h-n}, \{\psi_p\}_{p=0}^{n-1})$  с нормой

$$\|(g^h, \psi)\|_{C_{0, 1, \dots, 1/h-n} \times R^n} = \max \left\{ \max_{0 \leq q \leq 1/h-n} |g_q^h|, \max_{0 \leq p \leq n-1} |\psi_p| \right\}. \quad (1,7)$$

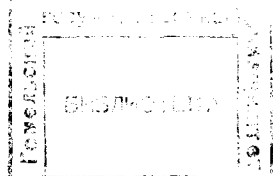
В силу конечно-порожденности схемы (1,3), (1,4), операторы  $A_h$  аппроксимируют оператор  $A$  задачи (1,1), (1,2) относительно естественных проекторов из  $C^n[0, 1]$ ,  $C[0, 1] \times R^n$  в  $C_h^n$ ,  $C_{0, 1, \dots, 1/h-n} \times R^n$  и нормы (1,7) на любой функции  $v(t) \in C^n[0, 1]$ . Что же касается устойчивости задачи (1,3), (1,4) в нормах (1,6), (1,7), т. е. существования  $A_h^{-1}$  при всех достаточных малых  $h$  и равномерной по  $h$  ограниченности этих операторов в нормах (1,6), (1,7), то она имеет место лишь при выполнении некоторого условия, выводу которого мы посвятим 2<sup>о</sup>, 3<sup>о</sup>.

2<sup>о</sup>. Определяющие операторы. Из (1,3) для (1,5) вытекает представление

$$(\Delta^m u^h)_i = \sum_{j=0}^{i+s-m} d_j (\bar{\Delta}^m u^h)_{i+j-s} \quad (2,1)$$

с коэффициентами  $d_j$ , которые определяются по набору  $\{m, s, l, \{a_j\}_{j=-s}^l\}$  однозначно.

Пусть  $C_h[t_0, t_{1/h-m}]$  — пространство сеточных функций  $w^h = \{w_i^h\}_{i=0}^{1/h-m}$  с нормой  $\|w^h\| = \max_{0 \leq i \leq 1/h-m} |w_i^h|$ ,  $C_{0, 1, \dots, 1/h-n}$  — пространство наборов  $g^h = \{g_q^h\}_{q=0}^{1/h-n}$  нормой  $\|g^h\| = \max_{0 \leq q \leq 1/h-n} |g_q^h|$ , и пусть  $s(m, q), l(m, q), d_i(m, q)$  — параметры выражения  $(\Delta^m u^h)_{i_q}$  из (1,3).



Представления (2,1) для выражений  $(\Delta^m u^h)_{i_q}$  из (1,3) порождают оператор  $Q_h^m$ , действующий из  $C_h[t_0, t_{1/h-m}]$  в  $C_{0,1,\dots,1/h-n}$  согласно формулам

$$(Q_h^m w^h)_q = \sum_{j=0}^{i+(m,q)+s(m,q)-m} d_j(m, q) w_{q+j-s(m,q)}^h, \quad q=0, 1, \dots, 1/h-n. \quad (2,2)$$

Операторы  $Q_h^m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , называются определяющими операторами разностной схемы (1,3). Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\|Q_h^m\|_{C_h[t_0, t_{1/h-m}] \rightarrow C_{0,1,\dots,1/h-n}} \leq K, \quad K \text{ не зависит от } h, \quad (2,3)$$

$$\|Q_h^m \{x(t_i)\}_{i=1}^{1/h-m} - \{x(t_{i_q})\}_{q=0}^{1/h-n}\|_{C_{0,1,\dots,1/h-n}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ для } \forall x(t) \in C[0, 1]; \quad (2,4)$$

при этом (2,3) следует из конечно-порожденности схемы (1,3), а (2,4) — отсюда же, из (2,2), установленного в (1,3) для коэффициентов  $d_j$  из (2,1) равенства

$$\sum_{j=0}^{i+s-m} d_j = 1 \quad (2,5)$$

и включения  $x(t) \in C[0, 1]$ .

3°. Критерий устойчивости. Пусть сеточная функция  $x^h = \{x_i^h\}_{i=0}^N$  задана в узлах  $t_0, t_1, \dots, t_N$ ,  $N \leq 1/h$ . Условимся через  $\hat{x}^h$  обозначать ломаную, построенную по значениям  $x^h$  в узлах и доопределенную при  $t_N \leq t \leq 1$  числом  $x_N^h$ . В частности, если  $\bar{\Delta}^m v^h = \{(\bar{\Delta}^m v^h)_i\}_{i=0}^{1/h-m}$  есть набор всех разностных отношений вперед порядка  $m$  от  $v^h \in C_h^n$ , то  $\bar{\Delta}^m v^h$  есть функция из  $C[0, 1]$ , построенная указанным образом.

Лемма 3.1. Пусть  $\|v^h\|_{C_h^n} \leq K$ , где  $K$  не зависит от  $h$ . Тогда при  $m \leq n-1$  последовательность ломаных  $\bar{\Delta}^m v^h$  компактна в  $C[0, 1]$ .

Лемма 3.2. Пусть  $v^h \in C_h^n$ , и пусть для всех  $m \leq n$  ломаные  $\bar{\Delta}^m v^h$  сходятся в  $C[0, 1]$  при  $h \rightarrow 0$  к функциям  $v_m(t)$ . Тогда  $v_m(t) = v_0^{(m)}(t)$ .

Определение 3.1. Семейство  $\{Q_h^n\}_{h \rightarrow 0}$  операторов  $Q_h^n$  устойчиво, если при всех достаточно малых  $h$  операторы  $(Q_h^n)^{-1}$  существуют и равномерно по  $h$  ограничены в нормах пространств  $C_{0,1,\dots,1/h-n}$ ,  $C_h[t_0, t_{1/h-n}]$ .

Теорема 3.1. Для устойчивости задачи (1,3), (1,4) в нормах (1,6), (1,7) необходима и достаточна устойчивость семейства  $\{Q_h^n\}_{h \rightarrow 0}$ .

Достаточность. Пусть семейство  $\{Q_h^n\}_{h \rightarrow 0}$  устойчиво, но имеются  $v^h \in C_h^n$  такие, что  $\|v^h\|_{C_h^n} = 1$  и  $\|A_h v^h\| = \|(f^h, \varphi^h)\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Рассмотрим функцию  $w(t) = - \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t) v_r(t)$ , где  $v_r(t)$  есть предел при  $h \rightarrow 0$  ломаных  $\bar{\Delta}^r v^h$  в  $C[0, 1]$ . Проверка с учетом (2,3), (2,4) и сходимостей  $\bar{\Delta}^r v^h \rightarrow v_r(t)$ ,  $\|f^h\| \rightarrow 0$  показывает, что  $\|Q_h^n \{w(t_i)\}_{i=0}^{1/h-n} - Q_h^n \bar{\Delta}^n v^h\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , откуда в силу устойчивости  $\{Q_h^n\}_{h \rightarrow 0}$  имеем

$$\bar{\Delta}^n v^h \rightarrow w(t) = - \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t) v_r(t) \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ в } C[0, 1]. \quad (3,6)$$

Лемма 3.2, соотношение (3,6), нормированность  $v^h$  и переход к пределу при  $h \rightarrow 0$  в равенствах

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_p^{(r)} (\Delta^r v^h)_0 + \beta_p^{(r)} (\Delta^r v^h)_{1/h} = \varphi_p^h$$

приводят к противоречию с корректностью задачи (1,1), (1,2).

Необходимость доказывается от противного с использованием леммы 3.1.

4<sup>o</sup>. Метод блочной аппроксимации. Пусть  $k$  ( $k \geq 1$  целое) — требуемый порядок аппроксимации. По числам  $s=0, 1, \dots, k-1$  и  $m=0, 1, \dots, n$  изложенным в (3) способом строим многочлены

$$Q_{m,s}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} d_j(m,s) z^j$$

и отвечающие им разностные выражения для производных

$$(\Delta_s^m u^h)_i = \sum_{j=0}^{k-1} d_j(m,s) (\bar{\Delta}^m u^h)_{i+j-s} = \frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^{m+(k-1)-s} a_j(m,s) u_{i+j}^h$$

порядка аппроксимации  $h^k$ .

Пусть  $N$  целое  $h=1/(Nk+n-1)$  \*. Разобьем узлы сетки на промежутке  $[t_0, t_{1/h-n}]$  на  $N$  непересекающихся блоков  $\{t_{\alpha h}, t_{\alpha h+1}, \dots, t_{(\alpha+1)h-1}\}$ ,  $\alpha=0, 1, \dots, N-1$ , из  $k$  соседних узлов и заменим (1,1) в узле  $t_{\alpha h+s}$  разностным уравнением с использованием выражений  $(\Delta_s^m u^h)_{\alpha h+s}$ . Присоединяя к полученным уравнениям

$$(\Delta_s^n u^h)_{\alpha h+s} + \sum_{r=0}^{n-1} l_r(t_{\alpha h+s}) (\Delta_s^r u^h)_{\alpha h+s} = f(t_{\alpha h+s}), \quad 0 \leq s \leq k-1, \quad 0 \leq \alpha \leq N-1,$$

условия (1,4) с какими-либо фиксированными выражениями  $(\Delta^m u^h)_0$ ,  $(\Delta^m u^h)_{1/h}$  порядка аппроксимации  $h^k$ , приходим к системе разностных уравнений метода блочной аппроксимации.

Лемма 4.1. Многочлены  $Q_{n,s}(z)$ ,  $0 \leq s \leq k-1$ , линейно независимы.

Теорема 4.1. Описанный метод при любом  $k$  ( $k \geq 1$  целое) дает схему, устойчивую в нормах (1,6), (1,7).

Доказательство. Поскольку здесь матрица  $Q_h^n$  блочно-диагональна с блоком размерности  $k$  на главной диагонали,  $s$ -я,  $0 \leq s \leq k-1$ , строка которого составлена из коэффициентов  $d_j(n,s)$  многочлена  $Q_{n,s}(z)$ , утверждение об устойчивости автоматически следует из леммы 4.1 и теоремы 3.1.

Воронежский государственный университет  
им. Ленинского комсомола

Поступило  
6 VII 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. Г. Крейн, Л. Н. Шаблицкая, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 6, № 4, 648 (1966). <sup>2</sup> Р. М. Вайникко, Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, 1970. <sup>3</sup> Н. Н. Гудович, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т. 6, № 4, 760 (1966).

\*  $h \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .