Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 539.121.85

ФИЗИКА

Я. С. ДЕРБЕНЕВ, А. М. КОНДРАТЕНКО

РЕЛАКСАЦИЯ И РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НАКОПИТЕЛЯХ

(Представлено академиком А. Н. Скринским 27 VIII 1973)

1. В работах по кинетике поляризации частиц в накопителях обычно ограничивались ситуациями, когда время релаксации орбитального движения велико по сравнению с характерными периодами прецессии спина в неоднородном поле [1-3]. Фактически это означает достаточную удаленность от спиновых резонансов, вблизи которых это условие нарушается. В данной работе на основе уравнения для плотности поляризации, пригодного для анализа поведения поляризации ультрарелятивистских электронов (позитронов) в произвольных ситуациях, получены количественные результаты во всей области, где время релаксации спинов $\tau_{s\rho}$ велико по сравнению с временем релаксации орбитального движения τ_{orb}. Вне этой области поляризация исчезает за практически очень малое время порядка τ_{orb}.

2. Исходим из уравнения для расширенной матрицы R, описывающего движение системы частица+излучение:

$$\partial R/\partial t+\{\mathscr{H}_{ext}+V;\, R\}=0.$$

Выражения для гамильтониана частицы во внешнем поле $\mathscr{H}_{ext}$ и гамильтониана взаимодействия с излучением в квазиклассическом приближении с учетом спиновой зависимости были получены в [3]. Матрица плотности электрона ρ получается из R упрощением по полевым переменным Q: $\rho=\mathrm{Sp}_Q R$. Уравнение для ρ в низшем порядке по взаимодействию имеет вид *

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\mathscr{H}_{ext};\,\rho\}=\mathrm{Sp}_Q\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\{V_{t+\tau};\}V_{t-\tau};\,\rho|0\rangle\langle 0|\}\},\tag{1}$$

где V_t — оператор в представлении взаимодействия, $|0\rangle$ — волновая функция фотонного вакуума. В ультрарелятивистском случае $(\gamma^{-1}=(1-v^2)^{1/2}\ll\ll 1)$, когда ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ частицы меняется мало на длине формирования излучения, вычисление интегралов в правой части (1) от вакуумных средних по классическим траекториям сводится к взятию вычетов при $\tau=0$, $\tau=i\cdot 3^{1/2}/|\gamma\dot{\mathbf{v}}|$ [3, 4].

Для частицы со спином $1/2$ матрица ρ представляется в виде $\rho=(f+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\xi})/2$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрица Паули, $f=\mathrm{Sp}\,\rho$ — функция распределения по орбитальным переменным, $\boldsymbol{\xi}=\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma}\rho$ — плотность поляризации (здесь Sp означает упрощение по спиновым индексам). В квазиклассическом случае f и $\boldsymbol{\xi}$ можно рассматривать как функции координат и импульсов частицы $\mathbf{r}, \mathbf{p}$. В уравнении для f поскольку разброс орбитальных квантовых чисел при $\gamma\gg 1$ велик, спиновыми поправками можно пренебречь. При этом получаем $(d/dt)_0 f=\mathrm{St}\,f$, где $(d/dt)_c=\partial/\partial t+\mathbf{v}\,\partial/\partial\mathbf{r}+e(\mathbf{E}+[\mathbf{vH}])\partial/\partial\mathbf{p}$ —

* При получении в (1) члена, описывающего взаимодействие с излучением, можно оставить под интегралом лишь симметричную по τ часть, так как несимметричная часть имеет вид скобки Пуассона и может быть учтена перенормировкой гамильтониана $\mathscr{H}_{ext}$.

производная вдоль траектории во внешнем поле, правая часть описывает перемешивание частиц в пучке под действием радиационного трения и квантовых флуктуаций излучения:

$$\mathrm{St}=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\overline{\frac{d}{dt}\Delta p_\alpha\Delta p_\beta\frac{\partial}{\partial p_\alpha}},$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}=-\frac{2}{3}e^2\dot{\mathbf{v}}^2\gamma^4\mathbf{v},\qquad \overline{\frac{d}{dt}\Delta p_\alpha\Delta p_\beta}=\frac{55}{24\sqrt{3}}\hbar\frac{e^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\mathbf{v}}|^3p_\alpha p_\beta.$$

Для плотности поляризации $\boldsymbol{\xi}$ после всех вычислений получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0\boldsymbol{\xi}-[\mathbf{W}\boldsymbol{\xi}]=\mathrm{St}\,\boldsymbol{\xi}-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{p}\right)\lambda\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{|\dot{\mathbf{v}}|}f-\lambda\left\{\frac{5\sqrt{3}}{8}\left[\boldsymbol{\xi}-\frac{2}{9}\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{v})\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{|\dot{\mathbf{v}}|}f\right\};\tag{2}$$

здесь $\lambda=\hbar(e^2/m^2)\gamma^5|\dot{\mathbf{v}}|^3$, $\mathbf{W}$ — угловая скорость прецессии спина во внешнем поле ([5–7]).

Уравнение (2) содержит все существенные механизмы воздействия излучения на поляризацию. Член $\mathrm{St}\,\boldsymbol{\xi}$ учитывает радиационное трение и флуктуации импульса, приводящие в неоднородном поле к деполяризующим эффектам* ([1,2]). Второй член в правой части обязан силе спин-орбитального взаимодействия с полем классического излучения ([3]). Третий член описывает прямое действие излучения на поляризацию частицы и соответствует полученному в ([6]) выражению для средневероятной скорости изменения вектора спина в акте излучения.

3. В накопителях частицы движутся с малым разбросом около равновесной орбиты. Изменение степени поляризации пучка обязано непосредственному действию излучения, характеризуемому временем λ^{-1}, и неравновесной части $\mathbf{W}$, воздействие которой становится необратимым за время радиационного перемешивания траекторий частиц $\tau_{\mathrm{orb}}\sim|\gamma^3(e^2/m)\dot{\mathbf{v}}^2|^{-1}\ll\ll\lambda^{-1}$ и существенно зависит от спектра движения во внешнем поле. Искомое время релаксации спинов τ_{sp} может меняться в пределах $\tau_{\mathrm{orb}}\leqslant\leqslant\tau_{\mathrm{sp}}\leqslant\lambda^{-1}$. Время релаксации τ_{sp} будет порядка τ_{orb} вблизи спиновых резонансов достаточно большой мощности. В этом случае пучок будет заведомо деполяризован. При $\tau_{\mathrm{sp}}\gg\tau_{\mathrm{orb}}$ в нулевом приближении плотность поляризации пропорциональна функции распределения частиц, а скорость изменения степени поляризации можно находить по теории возмущений.

На равновесной траектории движение спина в общем случае представляет собой прецессию вокруг периодического направления $\mathbf{n}(\theta)=\mathbf{n}(\theta+2\pi)$ (θ — обобщенный азимут частиц) с частотой ν_s ([7]). Ввиду быстрого размешивания по фазам прецессии, средняя поляризация будет направлена по $\mathbf{n}$. Естественно поэтому задавать поляризацию проекциями на периодические по θ орты $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — поперечные к $\mathbf{n}$ орты, выбранные так, чтобы $\nu_s=\mathrm{const}$. В этой системе уравнение для $\boldsymbol{\xi}$ будет отличаться от (2) вычитанием из $\mathbf{W}$ угловой скорости вращения базиса:

$$\mathbf{W}\to\mathbf{W}-\dot{\theta}(\mathbf{W}_s-\nu_s\mathbf{n})/\dot{\theta}_s\equiv\nu_s\mathbf{n}+\mathbf{w},$$

где $\dot{\theta}_s$ — равновесная частота обращения частицы в накопителе, $\mathbf{W}_s(\theta)$ — значение $\mathbf{W}$ на равновесной траектории.

* При наличии дополнительных стохастических возмущений, они также будут давать вклад в St-член.

Плотность поляризации представляем в виде $\boldsymbol{\xi}=\zeta(t)\mathbf{n}f+\Delta\boldsymbol{\xi}$ с условием $\int\mathbf{n}\Delta\boldsymbol{\xi}\,d^3p\,d^3r=0$. Проектируя уравнение (2) на $\mathbf{n}$ и производя интегрирование, получаем выражение для скорости изменения степени поляризации ζ

$$\dot{\zeta}=\int d^3p\,d^3r\left\{\left[\,\mathbf{w}\Delta\boldsymbol{\xi}\right]\mathbf{n}-\lambda f\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}\zeta\left[1-\frac{2}{9}(\mathbf{n}\mathbf{v})^2\right]+\frac{(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\mathbf{n}}{\dot{v}}\right)\right\}. \quad (3)$$

В уравнении для $\Delta\boldsymbol{\xi}$ можно пренебречь прямым воздействием излучения и изменением ζ со временем. При этом получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0\Delta\boldsymbol{\xi}-[(\mathbf{v}_s\mathbf{n}+\mathbf{w})\Delta\boldsymbol{\xi}]-\mathrm{St}\,\Delta\boldsymbol{\xi}=[\mathbf{w}\mathbf{n}]\zeta f-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{p}\right)\lambda\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{|\dot{\mathbf{v}}|}f. \quad (4)$$

Для нахождения окончательного уравнения на ζ достаточно подставить в (3) вынужденное решение уравнения (4) для $\Delta\boldsymbol{\xi}$ и усреднить по периоду обращения частиц. Это уравнение, очевидно, будет иметь вид

$$\dot{\zeta}=-\alpha_+\zeta+\alpha_-,\qquad \zeta_t=(\zeta_0-\alpha_-/\alpha_+)e^{-\alpha_+t}+\alpha_-/\alpha_+, \quad (5)$$

где $\alpha_\pm$ — постоянные.

4. Практически в накопителе разброс частот орбитального и спинового движений значительно превышает обратное время релаксации τ_{orb}^{-1}. Это обстоятельство существенно облегчает решение уравнения (4), так как столкновительный член $\mathrm{St}\,\Delta\boldsymbol{\xi}$ можно учесть по теории возмущений. При этом могут возникать особые точки — точки спиновых резонансов. Однако нам и не требуется знание решения вблизи резонанса: при вычислении коэффициентов $\alpha_\pm$ контур интегрирования можно сместить в комплексную плоскость так, чтобы удовлетворить условию удаленности от резонансов. Правило обхода точек резонанса должно отвечать затуханию однородного решения уравнения (4). Для явного вычисления возникающих при решении (4) интегралов по времени, $\mathbf{w}\mathbf{e}_1+i\mathbf{w}\mathbf{e}_2$ представляем в виде

$$\mathbf{w}\mathbf{e}_1+i\mathbf{w}\mathbf{e}_2\Rightarrow\sum_k w_k\exp i\psi_k,$$

где ψ_k — целочисленные комбинации из фаз орбитального движения, а гармоники w_k и частоты $\nu_k\equiv\dot{\psi}_k$ являются функциями интегралов движения типа амплитуд колебаний. Подставляя решение (4) в (3) (в линейном приближении по $\mathbf{w}$), приходим к следующим выражениям для $\alpha_\pm$:

$$\alpha_+=\left\langle\frac{5\sqrt{3}}{8}\lambda\left[1-\frac{2}{9}(\mathbf{n}\mathbf{v})^2+\frac{11}{18}\left|\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_k\frac{w_k\exp i\psi_k}{\nu-\nu_k-i0}\right|^2\right]+\right.$$
$$\left.+\pi\sum_k|w_k|^2\delta(\nu-\nu_k)\right\rangle,$$
$$\alpha_-=\left\langle\lambda\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{|\dot{\mathbf{v}}|}\left[\mathbf{n}-\mathrm{Re}(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_2)\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_k\frac{w_k\exp i\psi_k}{\nu-\nu_k-i0}\right]\right\rangle, \quad (6)$$

где $\nu=\nu_s+\overline{\mathbf{w}\mathbf{n}}$ — средняя на заданной траектории частота прецессии спина, скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по распределению частиц в пучке и их равновесному движению. При вычислении производной $\partial/\partial\gamma$ следует рассматривать w_k, ψ_k, ν, ν_k как функции энергии и поперечных отклонений импульса и координаты от равновесной орбиты.

Значения $\alpha_\pm$, как видно, существенно зависят от близости спиновых резонансов $\nu=\nu_k$. Ввиду этого, вообще говоря, необходимо принимать во внимание и резонансы, возникающие в высших приближениях по $\mathbf{w}$. Формулы (6) сохраняют свой вид, если гармоники w_k, задающие мощности резонансов, определять с учетом приближений ([8]).

Вдали от резонансов член, содержащий $\delta(\nu-\nu_k)$, обращается в нуль, а в знаменателях $\nu-\nu_k-i0$ можно пренебречь дисперсией расстройки $\nu-\nu_k$. При этом $\alpha_\pm$ совпадает с выражением, полученным в ([3]) в нерезонансной ситуации. Формулы (7) обобщают результаты ([3]) на ситуации, когда при стохастических блужданиях расстройки возможны прохождения резонансов. При этом члены с производными $\partial/\partial\gamma$, как и в ([3]), учитывают возмущение оси квантования излучением вне области резонанса, где частица, ввиду большого разброса $\nu-\nu_k$, пребывает основную долю времени. Член с δ-функцией описывает деполяризующее воздействие многократных некоррелированных прохождений резонанса. Максимальное деполяризующее воздействие гармоники w_k, очевидно, достигается в области $|\varepsilon_k|\leqslant\Delta\equiv(\langle\varepsilon_k^2\rangle-\langle\varepsilon_k\rangle^2)^{1/2}$; при этом* $(\alpha_+)_k\sim\langle|w_k|^2\rangle/\Delta$, откуда следует, что опасность могут представлять лишь резонансы, для которых $\langle|w_k|^2\rangle\gtrsim\lambda\Delta$. Как видно, условие $\tau_{sp}=\alpha_+^{-1}\gg\tau_{orb}$ эквивалентно условию быстроты прохождений резонансов.

Формулы (5), (6) достаточны для анализа поведения поляризации электронов (позитронов) в стационарных условиях. Гармоники w_k и дисперсия частот определяются конкретной структурой электромагнитного поля вблизи равновесной траектории. При $\alpha_+\sim\lambda$ за время $\sim\lambda^{-1}$ устанавливается конечная степень поляризации α_-/α_+. При $\alpha_+\gg\lambda$ поляризация пучка исчезает за время $\tau_{sp}\sim\max(\alpha_+^{-1},\tau_{orb})$.

Выражаем благодарность акад. А. Н. Скринскому, а также В. Н. Байеру, В. М. Каткову, В. М. Страховенко за обсуждение работы.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Н. Байер, Ю. Ф. Орлов*, ДАН, т. 165, 783 (1965). [2] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко*, ЖЭТФ, т. 62, 430 (1972). [3] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко*, ЖЭТФ, т. 64, 1918 (1973). [4] *В. Н. Байер, В. М. Катков*, ЖЭТФ, т. 52, 1422 (1967). [5] *V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi*, Phys. Rev. Lett., v. 2, 435 (1959). [6] *В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко*, ЖЭТФ, т. 58, 1695 (1970). [7] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, А. Н. Скринский*, ДАН, т. 192, 1255 (1970). [8] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, А. Н. Скринский*, ЖЭТФ, т. 60, 1216 (1971).

* Ранее в работе ([2]) при рассмотрении быстрых диффузионных прохождений резонанса была получена оценка $(\alpha_+)_k\sim(\langle|w_k|^2\rangle/\Delta)(\lambda/\Delta)^{1/3}$. Отличие этого результата связано с тем, что в ([2]) не учитывалась многократность прохождения резонанса за время τ_{orb}.