

Р. А. ЗВЯГИНА, М. А. ЯКОВЛЕВА

**О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ
БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ С ОКАЙМЛЕНИЕМ**

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 29 I 1974)

При решении больших задач линейного программирования существенное значение приобретает алгоритмический учет специфики задачи. Во многих случаях это позволяет снизить требования к объему оперативной памяти ЭВМ, сократить число арифметических операций и даже повысить точность вычислений. Значительное продвижение в этом направлении было получено за счет использования в рамках метода последовательного улучшения ⁽¹⁾ разветвленной блочной структуры в матрице системы уравнений задачи. Были предложены методы ⁽²⁻⁴⁾, использующие распадение системы уравнений $Ax=b$ на небольшую подсистему общего вида и подсистему с блочно-диагональной матрицей. Обобщение этих методов состоит в том, что для каждого блока в блочной части матрицы A , в свою очередь, допускается распадение на строки общего вида и блочно-диагональную часть, причем глубина такого разветвления может быть произвольной ⁽⁵⁾. Симметричный подход можно получить, если допускать, что в матрице A имеются столбцы, значительно портящие ее структуру ⁽⁶⁾. В настоящей статье предлагается более общий подход к выявлению и учету специфики задачи, который естественным образом обобщает указанные выше методы. Основой этого подхода является разложение неособенной подматрицы в A в произведение двух матриц блочно-треугольного типа. Ниже рассматривается вопрос о пересчете этих блочно-треугольных матриц в связи с заменой одного столбца в выделенной неособенной подматрице.

1. Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество номеров строк, а $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество номеров столбцов матрицы $A[M, N]$ ранга $m \leq n$. Предположим, что при некотором $P = \{1, 2, \dots, p\}$ заданы разбиения $M_k, k \in Q \subset P$, и $N_k, k \in Q' \subset P$, множества M и N соответственно. Кроме того, для каждого $k \in P$ заданы множества \bar{M}_k и \bar{N}_k такие, что $M_k \subset \bar{M}_k \subset M$, $N_k \subset \bar{N}_k \subset N$, где $M_k = \emptyset$ при $k \in P \setminus Q$, а $N_k = \emptyset$ для $k \in P \setminus Q'$. Совокупность пар

$$(M_k, \bar{N}_k), (\bar{M}_k, N_k), \quad k \in P, \quad (1)$$

назовем блочной структурой матрицы $A[M, N]$, если все ее ненулевые элементы заключены в подматрицах (блоках) $A[M_k, \bar{N}_k]$, $A[\bar{M}_k, N_k]$, $k \in P$. Заметим, что при $A[\bar{M}_k \setminus M_k, N_k] = 0$ для всех $k \in P$ матрицу $A[M, N]$ можно отнести в класс, рассмотренный в ⁽⁵⁾, а при $A[M_k, \bar{N}_k \setminus N_k] = 0$ для всех $k \in P$ в этот же класс можно отнести матрицу, транспонированную по отношению к $A[M, N]$ (здесь и далее блок $A[X, Y]$, в котором хотя бы одно из множеств X или Y пусто, считается нулевым).

2. Рассмотрим сначала матрицу $A[M, N]$ с блочной структурой (I, J) , $(M \setminus I, N)$, $(M, N \setminus J)$, считая $I \subset M$, $J \subset N$ выбранными таким образом, что матрица $A[I, J]$ имеет некоторую специальную структуру. Пусть $A[M, K]$ — квадратная неособенная матрица, $K \subset N$. Выделив в $A[I, J \cup K]$ квадратную неособенную подматрицу $A[I_0, J_0]$, можно построить (очевид-

но, однозначно) разложение

$$A[M, K] = \left[\begin{array}{c|c} A[I_0, J_0] & 0 \\ \hline A[M \setminus I_0, J_0] & V[M \setminus I_0, K \setminus J_0] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E[J_0, J_0] & \Lambda[J_0, K \setminus J_0] \\ \hline 0 & E[K \setminus J_0, K \setminus J_0] \end{array} \right], \quad (2)$$

где $E[K, K]$ — единичная матрица, $V[M \setminus I_0, K \setminus J_0] = A[M \setminus I_0, K \setminus J_0] - A[M \setminus I_0, J_0] \cdot \Lambda[J_0, K \setminus J_0]$, а матрица $\Lambda[J_0, K \setminus J_0]$ — решение уравнения $A[I_0, J_0] \cdot \Lambda[J_0, K \setminus J_0] = A[I_0, K \setminus J_0]$. Отметим, что если $A[I, J]$ — блочно-диагональная матрица, то существуют такие разбиения M_k , $1 \leq k < p$, и N_k , $1 \leq k < p$, множеств I и J соответственно, что семейство

$$(M_k, N_k), \quad 1 \leq k < p; \quad M_p = M \setminus I, \quad N_p = N \setminus J, \quad \bar{M}_p = M, \quad \bar{N}_p = N \quad (3)$$

является блочной структурой матрицы $A[M, N]$ (достаточно положить $\bar{M}_k = M_k$, $\bar{N}_k = N_k$, $1 \leq k < p$). В этом случае, очевидно, блок $\Lambda[J_0, K \setminus J_0]$ имеет блочную структуру $(\bar{N}_k \cap J_0, N_k \cap (K \setminus J_0))$, $k \in P$.

На выбор множеств I_0, J_0 наложим условие

$$\text{rang } V[I_1, K \setminus J_0] = \text{rang } V[I_1, K \cap (N \setminus J)], \quad (4)$$

где $I_1 = I \setminus I_0$. Ясно, что при нулевой матрице $V[I_1, (K \setminus J_0) \cap J]$ условие (4) выполняется автоматически. Нарушение же условия (4) означает, что порядок матрицы $A[I_0, J_0]$ слишком занижен, и методом окаймления (2) можно получить неособенную матрицу $A[I_0 \cup \{i\}, J_0 \cup \{j\}]$ с номерами $i \in I_1$, $j \in (K \setminus J_0) \cap J$, при которых элемент $V[i, j]$ отличен от нуля. С другой стороны, при выполнении условия (4) такое окаймление нежелательно, так как при малом $|V[i, j]|$ матрица $A[I_0 \cup \{i\}, J_0 \cup \{j\}]$ почти вырожденная. Это не касается, конечно, случаев, когда неособенность последней матрицы может быть гарантирована, как, например, для матрицы $A[I, J]$ транспортного типа.

Итак, считая условие (4) выполненным, выберем $J_1 \subset K \cap (N \setminus J)$ (при $I_1 \neq \emptyset$) таким образом, что матрица $V[I_1, J_1]$ квадратная и неособенная. Положим $I_2 = M \setminus I$, $J_2 = K \setminus (J_0 \cup J_1)$ и представим $V[M \setminus I_0, K \setminus J_0]$ (очевидно, однозначно) как произведение двух матриц:

$$V[M \setminus I_0, K \setminus J_0] = \left[\begin{array}{c|c} V[I_1, J_1] & 0 \\ \hline V[I_2, J_1] & B[I_2, J_2] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E[J_1, J_1] & \Lambda[J_1, J_2] \\ \hline 0 & E[J_2, J_2] \end{array} \right], \quad (5)$$

где $B[I_2, J_2] = V[I_2, J_2] - V[I_2, J_1] \cdot \Lambda[J_1, J_2]$, а матрица $\Lambda[J_1, J_2]$ — решение уравнения $V[I_1, J_1] \cdot \Lambda[J_1, J_2] = V[I_1, J_2]$.

Если теперь в разложении (2) блок $V[M \setminus I_0, K \setminus J_0]$ заменить в соответствии с (5), то получим разложение

$$A[M, K] = \left[\begin{array}{c|c|c} B[I_0, J_0] & 0 & 0 \\ \hline A[I_1, J_0] & B[I_1, J_1] & 0 \\ \hline A[I_2, J_0] & V[I_1, J_1] & B[I_2, J_2] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} E[J_0, J_0] & \Lambda[J_0, J_1] & \Lambda[J_0, J_2] \\ \hline 0 & E[J_1, J_1] & \Lambda[J_1, J_2] \\ \hline 0 & 0 & E[J_1, J_2] \end{array} \right], \quad (6)$$

однозначно определяемое парами (I_k, J_k) , $0 \leq k \leq 2$. Здесь $B[I_0, J_0] = A[I_0, J_0]$, $B[I_1, J_1] = V[I_1, J_1]$. Левую матрицу в правой части (6) обозначим через $B[M, K]$, а правую — через $S[K, K] = E[K, K] + \Lambda[K, K]$.

3. При замене $j_0 \in K$ на некоторый номер $j' \in N$, при котором матрица $A[M, K' \setminus \{j_0\}]$ неособенная ($K' = K \cup \{j'\}$), для пересчета матриц $B[M, K]$, $S[K, K]$ используются две основные процедуры: (I) усечение $B[I_k, J_k]$ с окаймлением $B[I_{k+1}, J_{k+1}]$, (II) окаймление $B[I_k, J_k]$ с усечением $B[I_{k+1}, J_{k+1}]$, $0 \leq k < 2$.

(I) При заданном $j \in J_k$ выберем $i \in I_k$ равным номеру отличного от нуля (например, наибольшего по абсолютной величине) элемента строки $v[i_k]$,

удовлетворяющей системе $v[I_k] \cdot B[I_k, J_k] = E[j, J_k]$. При таком выборе i матрица $B[I_k \setminus \{i\}, J_k \setminus \{j\}]$ неособенная. К блоку $S[J_k \setminus \{j\}, K]$ следует добавить матрицу $-\frac{1}{v[i]} \cdot u[J_k \setminus \{j\}] \cdot S[j, K]$, где столбец $u[J_k]$ — решение

уравнения $B[I_k, J_k] \cdot u[J_k] = E[I_k, i]$. К блоку $B[M, J_{k+1}]$ следует приписать столбец $B'[M, j] = B[M, j] + \frac{1}{v[i]} \cdot B[M, J_k \setminus \{j\}] \cdot u[J_k \setminus \{j\}]$ и добавить матрицу

$B'[M, j] \cdot \Lambda[j, J_{k+1}]$, а в блоке $S[J_{k+1} \cup \{j\}, K]$ к j -й строке добавить строку $-\Lambda[j, J_{k+1}] \cdot S[J_{k+1}, K]$.

(II) При заданном $i \in I_{k+1}$ ($j \in J_{k+1}$) выберем $j \in J_{k+1}$ ($i \in I_{k+1}$) равным номеру отличного от нуля (например, наибольшего по абсолютной величине) элемента в строке $B[i, J_{k+1}]$ (в столбце $B[I_{k+1}, j]$). При таком выборе i (или j) подматрица $B'(I_k \cup \{i\}, J_k \cup \{j\})$ матрицы $B'[M, J_k \cup \{j\}]$, полученной приписыванием к $B[M, J_k]$ столбца $B'[M, j] = B[M, j] + B[M, J_k] \cdot \Lambda[J_k, j]$, неособенная. К блоку $S[J_k, K]$ следует приписать строку $S'[j, K] = \frac{1}{B[i, j]}$.

$\cdot B[i, J_{k+1}] \cdot S[J_{k+1}, K]$ и добавить матрицу $-\Lambda[J_k, j] \cdot S'[j, K]$, а к блоку $B[M, J_{k+1} \setminus \{j\}]$ — добавить матрицу $B[M, j] \cdot S'[j, J_{k+1} \setminus \{j\}]$.

Напомним, что разложение (6) построено в предположении

$$I_2 = M \setminus I, \quad J_1 \subset N \setminus J, \quad (7)$$

которое продиктовано лишь стремлением к более полному учету специфики в $A[M, N]$. Разложение (6) и процедуры (I), (II) можно построить и без предположения (7), хотя, как будет показано ниже, с помощью цепочки тех же процедур (I), (II) получается разложение, удовлетворяющее (7).

Перейдем теперь к пересчету матриц $B[M, K]$, $S[K, K]$, заменив в процедурах (I), (II) матрицу $S[K, K]$ на $S[K, K']$, где $S[K, j']$ — решение уравнения $B[M, K] \cdot S[K, j'] = A[M, j']$.

а) Если $j_0 \in J_1$, то столбец $B[M, j_0]$ заменяется на $B[M, j'] = A[M, j'] - B[M, K \setminus J_2] \cdot S[K \setminus J_2, j']$, а столбец $S[K \setminus J_2, j_0]$ — на $S[K \setminus J_2, j']$.

б) Если $j_0 \in J_1$, то для перехода к случаю а) достаточно применить процедуру (I) при $k=1, j=j_0$. В результате вместо множеств I_2, J_2 получим $I_2 \cup \{i_0\}, J_2 \cup \{j_0\}$ соответственно, где $i_0 \in I_1$ — номер, выбранный в качестве i в (I), причем $I_2 \cup \{i_0\} \neq M \setminus I$. После преобразований а) следует применить процедуру (II) при $k=1, i=i_0$ с заменой J_2 на $J_2 \cup \{j'\}$. В результате вместо множества $J_1 \setminus \{j_0\}$ получим $(J_1 \setminus \{j_0\}) \cup \{j_1\}$, где j_1 — номер, выбранный в качестве j в (II). Если $j_1 \in N \setminus J$, то пересчет матриц $B[M, K]$, $S[K, K]$ закончен. В противном случае ($j_1 \in J$), чтобы ликвидировать нарушение условия (7), достаточно применить процедуру (II) при $k=0, j=j_1$. При этом, если матрица $A[I, J]$ блочно-диагональная, то номер $j_1 \in N_\tau, 1 \leq \tau < p$, добавляется к множеству $J_0 \cap N_\tau$, а номер i , выбранный в (II), — к множеству $I_0 \cap M_\tau$.

в) Если $j_0 \in J_0$, то для перехода к случаю б) достаточно применить процедуру (I) при $k=0, j=j_0$. При этом, если матрица $A[I, J]$ блочно-диагональная, то номер j_0 исключается из $J_0 \cap N_\tau$, а номер i , выбранный в (I), — из $I_0 \cap M_\tau, 1 \leq \tau < p$.

4. Для матрицы $A[M, N]$ с блочной структурой (1) положим $R = \{[k, \sigma] : \bar{M}_k \cap \bar{M}_\sigma \neq \emptyset \text{ или } \bar{N}_k \cap \bar{N}_\sigma \neq \emptyset, k \neq \sigma; k, \sigma \in P\}$ и предположим, что в P введен иерархический порядок \leq , согласованный с (1), т. е. для любого $k \in P$ множество $L_k = \{\sigma \in P : \sigma \geq k\}$ является линейно упорядоченным, и для любой пары $[k, \sigma] \in R$ элементы k и σ сравнимы⁽⁵⁾. Положим $P_s = \{k \in P : |L_k| = s\}, s = 1, 2, \dots, l$, где $|L_k|$ — число элементов в L_k , а $l = \max_{k \in P} |L_k|$. Не нарушая общности, можно считать, что $P_1 = \{p\}$.

Для любого $K \subset N$, при котором матрица $A[M, K]$ квадратная и неособенная, существует семейство $(I_{1k}, J_{1k}), (I_{2k}, J_{2k}), k \in P$, однозначно определяющее разложение $A[M, K] = B_l[M, K] \cdot S_l[K, K]$, в котором $B_l[M, K]$ — нижняя блочно-треугольная матрица с нулевыми (при $I_{ik} = J_{ik} = \phi, 1 \leq i \leq 2$) или неособенными подматрицами $B_l[I_{1k}, J_{1k}], B_l[I_{2k}, J_{2k}], k \in P$, на диагонали, а $S_l[K, K]$ — верхняя блочно-треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Кроме того, $I_{1k} \subset (\bigcup_{\sigma} \tilde{M}_{\sigma}), \sigma < k, J_{1k} \subset N_k, I_{2k} \subset M_k, J_{2k} \subset (\bigcup_{\sigma} \tilde{N}_{\sigma}), \sigma \leq k$, для всех $k \in P$.

Действительно, в п.п. 2,3 для случая блочно-диагональной матрицы $A[I, J]$ в множестве P неявно использовался порядок \leq , задаваемый соотношениями $k < p$ при $1 \leq k < p$. Этот порядок, очевидно, согласован с блочной структурой (3) матрицы $A[M, N]$ и для него $l=2$, семейство же $I_{1k} = J_{1k} = \phi, I_{2k} = I_0 \cap M_k, J_{2k} = J_0 \cap N_k, 1 \leq k < p, I_{1p} = I_1, J_{1p} = J_1, I_{2p} = I_2, J_{2p} = J_2$ удовлетворяет всем перечисленным требованиям.

Полагая $I = \bigcup_{\sigma} \tilde{M}_{\sigma}, J = \bigcup_{\sigma} \tilde{N}_{\sigma}, \sigma < p$, при $l \geq 2$, в разложении (6) получим $I_{ip} = I_i, J_{ip} = J_i, i=1, 2$. В силу согласованности \leq с (1), матрица $A[I_0, J_0]$ блочно-диагональная, и каждый ее блок

$$A[I_0 \cap (\bigcup_{\sigma} \tilde{M}_{\sigma}), J_0 \cap (\bigcup_{\sigma} \tilde{N}_{\sigma})], \tau \in P_2, \sigma \leq \tau, \quad (8)$$

является неособенной матрицей. Для любого $\tau \in P_2$ индуцированный порядок \leq в множестве $G = \{\sigma \in P : \sigma \leq \tau\}$ с наибольшим элементом τ согласован с блочной структурой $(I_0 \cap M_{\sigma}, J_0 \cap N_{\sigma}), (I_0 \cap \tilde{M}_{\sigma}, J_0 \cap \tilde{N}_{\sigma}), \sigma \leq \tau$, матрицы (8), и, наконец, максимальная длина цепи в G_{τ} не больше $l-1$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959. ² Г. Ш. Рубинштейн, Оптимальное планирование, № 2, 3 (1964). ³ Р. А. Звягина, Оптимальное планирование, № 2, 50 (1964). ⁴ К. В. Ким, Экономика и математические методы, т. 1, в. 1, 86 (1965). ⁵ Р. А. Звягина, Оптимизация, в. 1 (18), 22 (1971). ⁶ М. А. Яковлева, Оптимальное планирование, № 15, 58 (1970). ⁷ Д. К. Фаддеев, В. И. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1963.