Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 513.881+517.5 *МАТЕМАТИКА*

В. С. КЛИМОВ

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 XI 1973)

Теоремы вложения для пространств типа $W_p{}^1$, $\mathring{W}_p{}^1$ ([1]) тесно связаны с изопериметрическими неравенствами. Эта связь всесторонне изучалась в работах В. Г. Мазьи ([2]). Ниже указываются некоторые новые приложения изопериметрических неравенств к теоремам вложения.

1. Пусть функция $k(t, p)$ определена при всех $t\geqslant 0$, $p=(p_1, \ldots, p_n)\in R^n$, при фиксированном p $k(t, p)$ B-измерима по переменной t, а при фиксированном t $k(t, p)$ есть функция Минковского центрально-симметричного выпуклого тела $K(t)$. Обозначим через $K^*(t)$ поляру $K(t)$ ([3]), через $\operatorname{mes}_n K^*(t)$ — n-мерную лебегову меру $K^*(t)$. Функция $\operatorname{mes}_n K^*(t)$ измерима на $[0, \infty]$.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x)\in W_1{}^1(R^n)$ неотрицательна и имеет компактный носитель, $A_t=\{x: u(x)>t\}$, $\mu(t)=\operatorname{mes}_n A_t$ — функция распределения $u(x)$, ∇u — градиент u. Тогда*

$$\int_{R^n} k(u, \nabla u)\,dx\geqslant n\int_0^\infty \mu^{(n-1)/n}(t)\operatorname{mes}_n^{1/n} K^*(t)\,dt.$$

При доказательстве леммы используется изопериметрическое неравенство (([4]) стр. 260), связывающее внутреннюю меру A_t относительно тела $K^*(t)$ с величинами $\mu(t)$, $\operatorname{mes}_n K^*(t)$. Лемма 1 составляет основу доказательства теоремы 1.

Пусть $f(p)=f(p_1, \ldots, p_n)$ — выпуклая четная функция n переменных, причем $f(0)=0$ и множество $\{p\colon f(p)\leqslant h\}$ есть замкнутое ограниченное тело в R^n при любом $h>0$. Положим $|p|=(p_1{}^2+\ldots+p_n{}^2)^{1/2}$. Четную функцию $f^0(s)$ одного переменного s будем называть округлением $f(p)$, если при любом $h\geqslant 0$ множества $\{p\colon f(p)\leqslant h\}$ и $\{p\colon f^0(|p|)\leqslant h\}$ имеют одинаковую меру. Из теоремы Брунна (([4]) стр. 226) следует, что f^0 — выпуклая функция. Операция округления применима и к функции $f^*(q)=\sup\limits_p\{\langle p, q\rangle - f(p)\}$, сопряженной к f ([3]). Следует отметить, что, вообще говоря, $f^{*0}\neq f^{0*}$, однако функции f^{*0}, f^{0*} эквивалентны: $f^{*0}(\alpha_n s)\leqslant f^{0*}(s)\leqslant f^{*0}(\beta_n s)$ при всех s, где α_n, $\beta_n>0$ и зависят лишь от n. Отсюда вытекает, в частности, эквивалентность функций f^0 и f^{*0*}.

Теорема 1. *Пусть $t(\mu)$ — перестановка в убывающем порядке неотрицательной функции $u(x)$ из $\mathring{W}_1{}^1(R^n)$, имеющей компактный носитель. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_{R^n} f(\nabla u)\,dx\geqslant \int_0^d f^{*0*}\left[c_n\frac{dt}{d\mu}\mu^{1-1/n}\right]d\mu, \tag{1}$$

в котором

$$d=\operatorname{mes}_n\operatorname{supp} u(x),\qquad c_n=\frac{n\pi^{1/2}}{\Gamma^{1/n}(n/2+1)}.$$

Напомним, что $t(\mu)$ характеризуется свойствами: $t(\mu)$ не возрастает, непрерывна справа и равноизмерима с $u(x)$. Используя приемы работы ([5]), можно доказать аналог неравенства (1) для функций f, зависящих от u, ∇u.

2. Пусть G — ограниченная область R^n, $\mathring{W}_1{}^1(G)$ — множество функций из $W_1{}^1(G)$, обращающихся в нуль на границе области G, f — функция, удовлетворяющая условиям п. 1. Определим пространство $\mathring{W}_f{}^1(G)$ как совокупность функций $u(x)$ из $\mathring{W}_1{}^1(G)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{\mathring{W}_f{}^1}=\|\nabla u\|_f=\inf k,\qquad k>0,\qquad \int\limits_G f(\nabla u/k)\,dx\leqslant 1.$$

Банахово пространство $E=E(G)$ измеримых на G функций называется симметричным ([6, 7]), если норма в E монотонна и инвариантна относительно сохраняющих меру преобразований аргумента. Совокупность функций $r(\mu)$, $0\leqslant\mu\leqslant a=\mathrm{mes}_n G$, равноизмеримых с функциями из $E(G)$, образует симметричное пространство $E(0, a)$, если норму $r(\mu)$ из $E(0, a)$ определить равенством $\|r\|_E=\|u\|_F$, где $u(x)$ — функция из $E(G)$, равноизмеримая с $r(\mu)$. Важный класс симметричных пространств образуют пространства Орлича L_M ([8]).

Т е о р е м а 2. *Пусть оператор*

$$Hx=\int\limits_t^a s^{1/n-1}x(s)\,ds$$

действует и непрерывен из $L_{f^0}(0, a)$ *в пространство* $E(0, a)$, *соответствующее симметричному пространству* $E(G)$.

Тогда $\mathring{W}_f{}^1(G)$ *непрерывно вложено в* $E(G)$ *и* $\|u\|_E\leqslant b_n N(H)\|\nabla u\|_f$, *где* b_n — *константа, зависящая лишь от* n, $N(H)$ — *норма* H *как оператора, действующего из* $L_{f^0}(0, a)$ *в* $E(0, a)$.

Т е о р е м а 3. *Если функции Юнга* $M(t)$ и $\Phi(t)=f^0(t)$ *связаны равенством*

$$M^{-1}(t)=\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)s^{-(1+1/n)}\,ds,$$

то $\mathring{W}_f{}^1(G)$ *непрерывно вложено в* $L_M(G)$.

Т е о р е м а 4. *Если* $f^0(s)=|s|^n$, то $\mathring{W}_f{}^1(G)$ *непрерывно вложено в* $L_M(G)$, *где* $M(s)=\exp|s|^{n/(n-1)}-1$.

Т е о р е м а 5. *Если* $s^{1/n-1}\in L_{f^{*0}}$, *то* $\mathring{W}_f{}^1(G)$ *вполне непрерывно вложено в пространство* $C(G)$ *непрерывных в* $\overline{G}$ *функций.*

Теоремы 3—5 являются следствиями теоремы 2. Ранее они были известны лишь для случая, когда $f(p)=f^0(|p|)$ (см. ([2, 9-11]). Приведем теперь предложение, не вытекающее, вообще говоря, из теоремы 2.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $f(p_1, \ldots, p_n)$ *четна по каждому из переменных* $p_1, \ldots, p_n$, $M(u)=f(u, \ldots, u)$. *Тогда* $\mathring{W}_f{}^1(G)$ *непрерывно вложено в* $L_M(G)$.

3. Если $P=P(G)$, $P_1=P_1(G)$ — симметричные пространства функций, определенных на G, и $P\subset P_1$, то через P_1/P обозначается ([6]) множество измеримых на G функций, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u\|_{P_1/P}=\sup_{\|v\|_P\leqslant 1}\|uv\|_{P_1}.$$

Пространство P_1/P симметрично. В частности, симметрично пространство $P'=L/P$, называемое двойственным, к P. Обозначим через $\Lambda_\alpha(G)$, $0<\alpha<1$, пространство Лоренца, определяемое ([6, 7]) как совокупность суммируемых функций $u(x)$, для которых

$$\|u\|_{\Lambda_\alpha}=\int_0^\infty \mu^\alpha(t)\,dt<\infty,$$

где $\mu(t)=\mathrm{mes}_n A_t$, $A_t=\{x\colon |u(x)|>t\}$. Как известно, $\Lambda_\alpha(G)$ — симметричное пространство. Справедливы вложения $\Lambda_\alpha(G)\subset L_{1/\alpha}(G)\subset\Lambda_{\alpha+\varepsilon}(G)$, $0<\varepsilon<1-\alpha$. Пусть m — натуральное число, $m<n$, A — B-измеримое множество в R^n, $D_m(A)$ — m-мерный диаметр множества A ([12]).

Лемма 2. *Для каждой неотрицательной функции $u(x)$ из $\mathring{W}_1^1(G)$ имеет место неравенство*

$$\|\nabla_1 u\|_{\Lambda_\alpha}\geqslant k_0\int_0^\infty D_m^\beta(A_t)\,dt,$$

в котором $\nabla_1 u=|\nabla u|$, $A_t=\{x\colon u(x)>t\}$, $0<\alpha\,(n-m)<1$, $\beta m=\alpha n-1>0$, $k_0>0$ и не зависит от $u(x)$.

Теорема 7. *Пусть $t(\mu)$ — перестановка в убывающем порядке неотрицательной функции $u(x)\in\mathring{W}_1^1(G)$, $\beta m=\alpha n-1>0$, $\Delta(\mu)=D_m A_{t(\mu)}, P\subset\Lambda_\alpha$, $0<\alpha(n-m)<1$. Тогда*

$$\|\nabla_1 u\|_P\geqslant k_0\left\|\frac{dt}{d\mu}\Delta^\beta(\mu)\right\|_{(\Lambda_\alpha/P)'}. \qquad (2)$$

Обозначим через $\mathring{W}_P^1(G)$ совокупность функций $u(x)$ из $\mathring{W}_1^1(G)$, для которых $\|\nabla_1 u\|_P<\infty$. Для простоты предположим, что G — куб в R^n, определяемый соотношениями $0<x_i<a^{1/n}$, $i=1,\ldots,n$. Пусть R^m — некоторая координатная плоскость размерности m, G^m — проекция G на R^m, $a_m=\mathrm{mes}_m G^m$, G_y — пересечение G с плоскостью $n-m$ измерений, ортогональной R^m и проходящей через $y\in G^m$, $E(G^m)$ — симметричное пространство функций, определенных на G^m, $E(0, a_m)$ — соответствующее ему пространство на $[0, a_m]$. Предполагается, что E или сепарабельно, или двойственно к сепарабельному пространству. Положим $b(E)=\overline{\lim_{t\to 0}}\,[\varphi_E(2t)/\varphi_E(t)]$, где $\varphi_E(t)$ — фундаментальная функция пространства E ([6], [7]).

Введем в рассмотрение операторы

$$Qy=t^{\alpha-1}\sup_{\Delta\geqslant t^{m/n}}\Delta^{-\beta}\int_0^\Delta |y(s)|\,ds,\qquad H_m x=\int_{t^{n/m}}^a s^{1/n-1}x(s)\,ds.$$

Теорема 8 *Пусть P, α, β — объекты, удовлетворяющие условиям теоремы 7. Пусть выполняется одно из условий: 1°) оператор Q действует и непрерывен из $E'(0, a_m)$ в $P'(0, a)$; 2°) оператор H_m действует и непрерывен из $P(0, a)$ в $E(0, a_m)$, причем $b(E)<2^\beta$.*

Если $u(x)\in\mathring{W}_P^1(G)$, то функция

$$v(y)=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G_y}|u(x)|\in E(G^m)$$

и $\|v\|_E\leqslant k_1\|\nabla_1 u\|_P$, где $k_1>0$ и не зависит от $u(x)$.

4. Первые теоремы вложения, относящиеся к пространствам функций, производные которых принадлежат классам Орлича, установлены Е. П. Калугиной ([13]). Результаты Е. П. Калугиной в дальнейшем были развиты в работах ([14], [9]). В ([13], [14], [9]) содержалось ограничительное условие $f(p)=f^0(|p|)$, которое снято в теоремах 3, 5 настоящей статьи.

Ярославский государственный
университет

Поступило
31 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев,* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] *В. Г. Мазья,* В кн.: Теоремы вложения и их приложения, «Наука», 1970, стр. 142. [3] *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров,* УМН, т. 23, 6, 51 (1968). [4] *Г. Хадвигер,* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, «Наука», 1966. [5] *В. С. Климов,* Матем. заметки, т. 9, 6, 629 (1971). [6] *П. П. Забрейко,* Нелинейные интегральные операторы. Тр. семинара по функциональному анализу, в. 8, Воронеж, 1966, стр. 3. [7] *Е. М. Семенов,* ДАН, т. 156, № 6, 1292 (1964). [8] *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий,* Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. [9] *T. K. Donaldson, N. S. Trudinger,* J. Funct. Anal., v. 8, № 1, 52 (1971). [10] *В. С. Климов,* Матем. сборн., т. 82, № 3, 371 (1970). [11] *Е. А. Розенфельд,* Матем. заметки, т. 9, 6, 639 (1971). [12] *А. Г. Витушкин,* О многомерных вариациях, М., 1955. [13] *Е. П. Калугина,* ДАН, т. 96, № 1, 13 (1954). [14] *И. В. Гельман,* ДАН, т. 122, № 4, 547 (1958).