Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН УССР В. А. МАРЧЕНКО

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИСА

В работе (1) и последовавшей за ней серии работ (2-4) был развит новый метод решения некоторых нелинейных уравнений в частных производных, использующий обратную задачу теории рассеяния. В настоящей заметке на примере периодической задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриса (КдФ) будет показано, как можно решать некоторые начально-краевые задачи на конечном интервале, используя другие обратные задачи.

1. Рассмотрим семейство операторов

$$L[y]=-y''+v(x,\ t)y,\quad x\in[\alpha_1,\ \alpha_2],\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

и обозначим через $\varphi=\varphi(x,\alpha_1,t,z)$, $\psi=\psi(x,\alpha_1,t,z)$ решения уравнений $L[y]=zy$ при таких начальных данных в точке $x=\alpha_1$: $\varphi=\psi'=1$, $\varphi'=\psi=0$, а через

$$U=U(t,z)=\begin{pmatrix} \varphi(\alpha_2,\alpha_1,t,z) & \psi(\alpha_2,\alpha_1,t,z) \\ \varphi'(\alpha_2,\alpha_1,t,z) & \psi'(\alpha_2,\alpha_1,t,z) \end{pmatrix}$$

матрицы монодромии операторов L. Все функции предполагаются достаточно гладкими; производные по x обозначаются штрихами, по t — точкой; z — комплексный параметр.

Теорема 1. *Если матрицы монодромии $U(t,z)$ семейства* (1) *удовлетворяют уравнению*

$$\dot U=UA_1-A_2U,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

где A_1, A_2 — *произвольные матрицы вида*

$$A_i=\begin{pmatrix} b_i(t) & -(2a_i(t)+4z) \\ c_i(t)-2a_i(t)z+4z^2 & -b_i(t) \end{pmatrix},\quad i=1,2, \tag{3}$$

то функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдФ

$$\dot v-6vv'+v'''=0,\quad x\in[\alpha_1,\ \alpha_2],\quad t\geqslant 0,$$

причем

$$a_i(t)=v(\alpha_i,\ t),\quad b_i(t)=v'(\alpha_i,\ t),\quad c_i(t)=v''(\alpha_i,\ t)-2v^2(\alpha_i,\ t). \tag{4}$$

Обратное утверждение тоже верно.

Матрицы монодромии $U(z)$ обладают такими свойствами: 1) их элементы — четные целые функции экспоненциального типа $\sigma=\alpha_2-\alpha_1$ относительно $\lambda=z^{1/2}$, удовлетворяющие при $\lambda\to\infty$ известным асимптотическим формулам; 2) элементы каждого столбца имеют лишь вещественные перемежающиеся нули; 3) $\det U(z)=1$. Из решения обратной задачи на конечном интервале (5, 6) следует, что любая матрица $U(z)$, обладающая этими свойствами, есть матрица монодромии оператора вида (1), который восстанавливается по любому ее столбцу. Отсюда и из того, что $\det U(z)$ является интегралом системы (2), (3) следует, что если решение системы (2), (3) как функция z обладает свойством 1) и $U(0,z)$ — матрица монодромии оператора вида (1), то $U(t,z)$ является матрицей монодромии при всех $t\geqslant 0$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения КдФ:

$$\dot v-6vv'+v'''=0, \quad x\in[\alpha_2, \alpha_1], \quad t\geqslant 0; \quad v(x, 0)=q(x); \tag{5}$$
$$\Gamma_j(v_1, v_1', v_1''-2v_1^2; v_2, v_2', v_2''-2v_2^2)=0, \quad j=1, 2, 3,$$

где Γ_j — три связи между значениями v, v', v'' в точках α_1, α_2. Матрицу монодромии оператора $-y''+q(x)y$ обозначим через U_q.

Теорема 2. *Если элементы матриц A_i вида* (3) *удовлетворяют краевым условиям $\Gamma_j(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2)=0$ и решение $U(t)$ задачи Коши $U(0)=U_q$ системы* (2) *обладает свойством* 1), *то $U(t)$ — матрицы монодромии семейства* (1), *в котором функция $v(x, t)$ является решением задачи* (5), *и наоборот.*

Следовательно, для решения задачи (5) нужно найти матрицы A_1, A_2, удовлетворяющие условиям теоремы, решить задачу Коши $U(0)=U_q$ для системы (2) и по любому столбцу полученных матриц $U(t)$ восстановить функцию $v(x, t)$, решив обратную задачу. Труднее всего обеспечить свойство 1), для чего предлагается, следующий путь. Аппроксимируем начальную матрицу U_q полиномиальной $U_q^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{N}U_kz^k$ и ищем такие матрицы $A_i^{(N)}$, $i=1, 2$, вида (3), чтобы задача Коши $U(0)=U_q^{(N)}$ для системы (2) имела полиномиальное по z решение $U(t)=\sum\limits_{k=0}^{N}U_k(t)z^k$. Найдя из этого условия матрицы $A_i^{(N)}$, полагаем $A_i=\lim\limits_{N\to\infty}A_i^{(N)}$.

2. Этот путь действительно приводит к цели в периодической задаче КдФ, которая эквивалентна, очевидно, задаче (5) с краевым условием

$$v(\alpha_1, t)-v(\alpha_2, t)=v'(\alpha_1, t)-v'(\alpha_2, t)=v''(\alpha_1, t)-v''(\alpha_2, t)=0. \tag{5$'$}$$

Для простоты периодическую функцию $q(x)=q(x+\pi)$, $\alpha_2=\alpha_1+\pi$, считаем пять раз непрерывно дифференцируемой и точку α_1 выбираем так, что $q'(\alpha_1)\neq 0$ *. Чтобы удовлетворить граничным условиям (5′), мы обязаны взять $A_1=A_2=A$. Но тогда система (2), кроме $\det U(t)$, имеет своим интегралом $\operatorname{Sp} U(t)$ и эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\dot u_-=\{c(t)-2a(t)z+4z^2\}u_{12}+\{2a(t)+4z\}u_{21},\\
&\dot u_{12}=-2\{a(t)+4z\}u_--2b(t)u_{12},\\
&\dot u_{21}=-2\{c(t)-2a(t)z+4z^2\}u_-+2b(t)u_{21},\\
&-u_-^2(t)-u_{12}(t)u_{21}(t)\equiv 1-u_+^2(0), \quad u_+(t)\equiv u_+(0),
\end{aligned}\tag{6}$$

где через $u_{ij}(t)$ обозначены элементы матрицы $U(t)$ и

$$2u_+(t)=u_{11}(t)+u_{22}(t), \quad 2u_-(t)=u_{11}(t)-u_{22}(t).$$

Разложим начальные данные $1-u_+^2(0)$, $u_-(0)$ в произведения

$$1-u_+^2(0)=(\lambda_0-z)\prod_{n=1}^{\infty}n^{-4}(\lambda_n-z)(\tilde\lambda_n-z), \quad 4u_-(0)=-\pi q'(\alpha_1)\prod_{n=2}^{\infty}n^{-2}(\nu_n-z),$$

где λ_{2n}, $\tilde\lambda_{2n}$ (λ_{2n+1}, $\tilde\lambda_{2n+1}$) — нули функций $1-u_+(0)$ $(1+u_+(0))$: $-\infty<\lambda_0<\lambda_1\leqslant\tilde\lambda_1<\lambda_2\leqslant\tilde\lambda_2<\ldots$ Первый нуль функции $u_{21}(0)$ лежит в интервале $(-\infty, \lambda_0]$ и в каждом сегменте $[\lambda_n, \tilde\lambda_n]$ лежит ровно один нуль каждой функции $u_{21}(0)$, $u_{12}(0)$. Интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_1, \tilde\lambda_1), \ldots$ образуют лакуны в спектре оператора $-y''+q(x)y$, $-\infty<x<\infty$, и их длины убывают тем быстрее, чем более гладкая функция $q(x)$. Число лакун может быть конечным, т. е. может случиться, что $\lambda_n=\tilde\lambda_n$ при всех $n>N_0$. Существования пяти

* Такой выбор α_1 необязателен. Например, если $q(x)$ — четная функция, то проще взять $\alpha_1=0$.

производных у функции $q(x)$ достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\lambda}_n^3-\lambda_n^3)<\infty. \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$$D_N(z)=\prod_{n>N} n^{-4}(\lambda_n-z)(\tilde{\lambda}_n-z), \quad Q_N(z)=\prod_{n>N} n^{-2}(\nu_n-z),$$

$$T_{2N+1}(z)=(1-u_+^2(0))D_N^{-1}(z), \quad \theta_N=\inf_{-\infty<z<\tilde{\lambda}_n}|D_N^{-1}(z)Q_N^2(z)|,$$

$$u(z)=\theta_N u_-(0)Q_N^{-1}(z). \tag{8}$$

При таком выборе θ_N нули $\mu_i=\mu_i(N)$ полинома $T_{2N+1}(z)-u^2(z)$ вещественны и расположены так: $-\infty<\mu_0\leqslant\lambda_0<\lambda_1\leqslant\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\tilde{\lambda}_1<\ldots\lambda_N\leqslant\mu_{2N-1}\leqslant\leqslant\mu_{2N}\leqslant\tilde{\lambda}_N$.

Положим, наконец,

$$w(z)=(\mu_0-z)\prod_{n=1}^{N} n^{-2}(\mu_{2n}-z), \quad r(z)=\prod_{n=1}^{N} n^{-2}(\mu_{2n-1}-z) \tag{9}$$

и будем искать коэффициенты в системе (6) так, чтобы она имела решение вида

$$u_-(t)=\sum_{k=0}^{N-1}u_k(t)z^k, \quad u_{21}(t)=\sum_{k=0}^{N+1}w_k(t)z^k, \quad u_{12}(t)=\sum_{k=0}^{N}r_k(t)z^k, \tag{10}$$

обращающееся при $t=0$ в правые части формул (8), (9). Подставляя (10) в систему (6), находим

$$\begin{aligned} \dot{u}_k&=c(t)r_k+2a(t)w_k-2a(t)r_{k-1}+4w_{k-1}+4r_{k-2},\\ \dot{r}_j&=-4a(t)u_j-8u_{j-1}-2b(t)r_j,\\ \dot{w}_l&=-2c(t)u_l+4a(t)u_{l-1}-8u_{l-2}+2b(t)w_l, \end{aligned} \tag{11}$$

где $u_k=r_j=w_l=0$ при отрицательных k, j, l и при $k>N-1$, $j>N$, $l>N+1$, так что уравнения для $\dot{u}_N$, $\dot{u}_{N+1}$, $\dot{u}_{N+2}$ вырождаются и дают три алгебраических равенства. Отсюда легко следует:

$$\begin{gathered} w_{N+1}(t)=-r_N(t)=-r_N(0), \quad w_N(t)-r_{N-1}(t)=w_N(0)-r_{N-1}(0),\\ a(t)=\hat{r}_{N-1}(t)-\hat{w}_N(t), \quad b(t)=-4\hat{u}_{N-1}(t),\\ c(t)=2\{\hat{r}^2_{N-1}(t)-\hat{w}_N^2(t)\}-4\{\hat{r}_{N-2}(t)-\hat{w}_{N-1}(t)\}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\hat{r}_N(0)\hat{u}_k(t)=u_k(t), \quad r_N(0)\hat{r}_k(t)=r_k(t), \quad w_{N+1}(0)\hat{w}_k(t)=w_k(t).$$

Подставляя найденные выражения в систему (11), мы получим для функций u_k, r_j, w_l, $0\leqslant k$, j, $l\leqslant N-1$, систему автономных нелинейных дифференциальных уравнений — систему N-го приближения.

Лемма. *Системы N-го приближения имеют решения на всей оси $-\infty<t<\infty$ и найденные из них по формулам (12) функции $a=a_N(t)$, $b=b_N(t)$, $c=c_N(t)$ удовлетворяют оценке*

$$|a_N(t)|+|b_N(t)|+|c_N(t)|\leqslant C<\infty, \quad -\infty<t<\infty, \tag{13}$$

в которой константа C от N не зависит.

Доказательство этой основной леммы опирается на тождество $-u_-^2(t)-u_{12}(t)u_{21}(t)=T_{2N+1}(z)$, показывающее, что при изменении t корни полиномов $u_{12}(t)$, $u_{21}(t)$ (10) не выходят из сегментов $(-\infty, \lambda_0]$, $[\lambda_1, \tilde{\lambda}_1], \ldots, [\lambda_N, \tilde{\lambda}_N]$. Но согласно (12), $a_N(t)=u_{21}^{(1)}-u_{12}^{(1)}$,

$c_N(t)=2\{u_{12}^{(2)}-u_{21}^{(2)}\}$, $3\{b_N^2(t)-b_N^2(0)\}=16\{u_{12}^{(3)}(0)-u_{21}^{(3)}(0)-u_{12}^{(3)}(t)-u_{21}^{(3)}(t)\}$ ($u^{(k)}$ — сумма k-х степеней корней полинома u). Отсюда, используя (7), заключаем, что неравенство (13) является априорной оценкой, которая вместе с локальной теоремой существования решения завершает доказательство.

Теорема 3. *Периодическая задача Коши для уравнения КдФ имеет и притом единственное решение $v(x, t)$. Матрицы монодромии операторов* (1), *порождаемых этим решением, находятся из системы* (2), (3), *в которой коэффициенты матрицы $A=A_1=A_2$ равны пределам при $N\to\infty$ функций $a_N(t)$, $b_N(t)$, $c_N(t)$, находимых из систем N-го приближения. Скорость сходимости определяется скоростью стремления к нулю длин лакун у начального оператора $-y''+q(x)y$, и если их число N_0 конечно, то матрица A находится точно из системы N_0-го приближения.*

Если оператор $-y''+q(x)y$ имеет $N_0<\infty$ лакун, то $D_{N_0}(z)=Q_{N_0}^2(z)$, что приводит к неопределенному уравнению $u_+^2(z)+T_{2N_0+1}(z)Q_{N_0}^2(z)=1$, в котором неизвестные функции $Q_{N_0}(z)$, $u_+(z)$ должны быть экспоненциального типа относительно $\lambda=z^{1/2}$ и удовлетворять известным требованиям при $\lambda\to\infty$. Общее решение этого уравнения, найденное И. В. Островским: $Q_{N_0}(\lambda^2)=\{T_{2N_0+1}(\lambda^2)\}^{-1/2}\sin\theta(\lambda)$, $u_+(\lambda^2)=\cos\theta(\lambda)$, где функция

$$\theta(\lambda)=\int_C^\lambda \{T_{2N_0+1}(\xi^2)\}^{-1/2}P_{2N_0+1}(\xi)\,d\xi$$

отображает верхнюю полуплоскость в верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами в точках $\pm n_k\pi$. Это позволяет найти матрицы монодромии всех операторов с конечным числом лакун.

Заметим еще, что формулы (4) и произвольность точки α_1 позволяют найти функцию $v(x, t)$, минуя решения обратных задач.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
25 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. Gardner, J. Green et al.*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095 (1967). [2] *P. D. Lax*, Comm. on Pure and Appl. Math., v. 21, 467 (1968). [3] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат*, ЖЭТФ, т. 61, 118 (1971). [4] *В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев*, Функциональный анализ, т. 5, в. 4, 18 (1971). [5] *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, 309 (1951). [6] *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*, УМН, т. 19, в. 2(116), 3 (1964).