Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 517.945 *МАТЕМАТИКА*

Д. МУРТАЗАЕВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 3 XII 1973)

Система уравнений

$$\partial_{\bar z}w-q(z)\partial_z w+\mathcal{A}(z)w+\mathcal{B}(z)\bar{w}=0, \tag{1}$$

где $z=x+iy$, $\partial_{\bar z}={}^1/_2(\partial_x+i\partial_y)$, $\partial_z={}^1/_2(\partial_x-i\partial_y)$, $|q(z)|<1$, и связанные с нею краевые задачи достаточно хорошо изучены в монографии И. Н. Векуа ([1]) в предположении, что коэффициенты $\mathcal{A}(z)$ и $\mathcal{B}(z)$ принадлежат в рассматриваемой области классу L_p, $p>2$. Представляет интерес исследовать систему

$$\partial_{\bar z}w-q(z)\partial_z w+\frac{\mathcal{A}_0(z)}{|y|^\alpha}w+\frac{\mathcal{B}_0(z)}{|y|^\alpha}\bar{w}=0, \qquad \alpha>0, \tag{2}$$

в области G, содержащей отрезок оси $y=0$, где $|q(z)|\leqslant \mathrm{const}<1$, $\mathcal{A}_0(z)$ и $\mathcal{B}_0(z)$ — ограниченные измеримые. Следовательно, коэффициенты $\mathcal{A}_0(z)|y|^{-\alpha}$ и $\mathcal{B}_0(z)|y|^{-\alpha}$ при $\alpha\geqslant{}^1/_2$, вообще говоря, неинтегрируемы со степени $p>2$. Как показано А. Джураевым ([4]), система (1) приводится к системе вида (2) с $0<\alpha<1$ путем замены независимых переменных, когда вдоль некоторой простой аналитической кривой σ нарушается условие эллиптичности, т. е. когда $|q(z)|=1$ вдоль σ, причем направление характеристик системы не совпадает с направлениями касательной к кривой σ.

Пусть G — такая ограниченная область, что пересечение ее замыкания с осью $y=0$ непусто. Предположим, что граница Γ области G состоит из конечного числа замкнутых самонепересекающихся контуров Γ_0, $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$, причем Γ_0 охватывает все остальное и $\Gamma\in C_\mu^1$, $0<\mu\leqslant 1$ ([1]).

Настоящая заметка посвящена исследованию следующей задачи Римана — Гильберта.

З а д а ч а А. Требуется найти непрерывные по Гёльдеру в $G+\Gamma$ решения системы (2) при $0<\alpha<1$ и $q(z)\in C_\gamma^1(G+\Gamma)$, $0<\gamma\leqslant 1$, удовлетворяющие краевому условию

$$\mathrm{Re}[a(t)w(t)]_\Gamma=h(t), \tag{3}$$

где $a(t)$ и $h(t)$ — непрерывные по Гёльдеру функции на Γ, причем $a(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$.

Исследование этой задачи опирается на свойства интегрального оператора

$$Tw=\frac{1}{\pi}\iint_G Z(z,\zeta)\left[\frac{\mathcal{A}_0(\zeta)}{|\eta|^\alpha}w+\frac{\mathcal{B}_0(\zeta)}{|\eta|^\alpha}\bar{w}\right]dG_\zeta, \qquad 0<\alpha<1, \tag{4}$$

где

$$Z(z,\zeta)=\frac{W_\zeta(\zeta)}{W(\zeta)-W(z)}, \qquad \zeta=\xi+i\eta,$$

$W(z)$ — основной гомеоморфизм системы Бельтрами $B(w)\equiv\partial_{\bar z}w-q(z)\partial_z w=0$.

Лемма. *Оператор T является вполне непрерывным в пространстве функций, непрерывных по Гёльдеру с показателем β в $G(C_\beta(\bar{G}))$, $\beta\leqslant 1-\alpha$.*

Прежде всего покажем, что оператор T является ограниченным в $C_\beta(\bar{G})$, $\beta\leqslant 1-\alpha$. Очевидно, если $\|w\|_C=\max|w(z)|$, то

$$|Tw|\leqslant M_1\|w\|_C\iint\limits_G\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z|}\leqslant M_1\|w\|_C\Biggl(\iint\limits_{G-G_\delta}\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z|}+$$

$$+\iint\limits_{G_\delta}\frac{dG_\delta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z|}\Biggr)=M_1\|w\|_C(I_1+I_2),$$

где G_δ — круг фиксированного радиуса δ с центром в точке z. Далее заметим, что

$$I_1\leqslant\frac{1}{\delta}\iint\limits_{G-G_\delta}\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha}<M_2\delta^{-1},$$

$$I_2=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^\delta\frac{dr}{|y+r\sin\varphi|^\alpha}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|\sin\varphi|^\alpha}\int\limits_0^\delta\frac{dr}{|r+y(\sin\varphi)^{-1}|^\alpha}<M_3\delta^{1-\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|Tw\|_C\leqslant M_0\|w\|_C, \tag{5}$$

где M_0 — постоянная, зависящая лишь от области G, числа α и коэффициентов $\mathscr{A}_0(z)$, $\mathscr{B}_0(z)$.

Пусть $z_1, z_2\in G+\Gamma$. Покажем, что

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant N_0\|w\|_C|z_1-z_2|^{1-\alpha}, \tag{6}$$

где $f(z)=Tw$, N_0 — постоянная, зависящая лишь от области G, числа α и коэффициентов $\mathscr{A}_0(z)$, $\mathscr{B}_0(z)$. Заметим, что

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant N_1|z_1-z_2|\|w\|_C\iint\limits_G\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}$$

Для оценки последнего интеграла, следуя ([1]) (см. стр. 55), введем в рассмотрение концентрические круги G_1 и G_0 с центром в точке z_1 соответственно радиусов $\rho=2|z_1-z_2|$ и ρ_0, причем $\bar{G}\subset G_0$. Тогда

$$\iint\limits_G\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}\leqslant\iint\limits_{G_0-G_1}\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}+\iint\limits_{G_1}\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}=I_3+I_4.$$

Для $\zeta\notin G_1$ имеем $2|\zeta-z_2|\geqslant|\zeta-z_1|$. Поэтому

$$I_3\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{G_0-G_1}\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1|^2}=\frac{1}{2}\int\limits_\rho^{\rho_0}dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|y_1+r\sin\varphi|^\alpha r}\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|\sin\varphi|^\alpha}\int\limits_\rho^{\rho_0}\frac{dr}{r|r-|\varepsilon||^\alpha},$$

где $\varepsilon=y_1(\sin\varphi)^{-1}$, $y_1=\operatorname{Im}z_1$. Но так как

$$\int\limits_\rho^{\rho_0}\frac{dr}{r|r-|\varepsilon||^\alpha}=\frac{1}{\rho^\alpha}\int\limits_1^{\rho_0/\rho}\frac{d\tau}{\tau|\tau-|\varepsilon|\rho^{-1}|^\alpha}<\frac{1}{\rho^\alpha}\int\limits_1^\infty\frac{d\tau}{\tau|\tau-|\varepsilon|\rho^{-1}|^\alpha}<\frac{N_2}{\rho^\alpha},$$

то

$$I_3<N_3\rho^{-\alpha}, \tag{7}$$

Если $\zeta\in G_1$, то полагая $\zeta-z_1=|z_1-z_2|t=\rho re^{i\varphi}$, получим

$$I_4=\iint\limits_G\frac{dG_\zeta}{|\eta|^\alpha|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}=\frac{1}{\rho^\alpha}\iint\limits_{|t|\leqslant 2}\frac{dG_t}{|\operatorname{Im}t+y_1\rho^{-1}|^\alpha|t||t-e^{i\varphi}|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\rho^\alpha}\Biggl(\iint\limits_{|t|<1/2}\frac{dG_t}{|\operatorname{Im}t+y_1\rho^{-1}|^\alpha|t|}+\iint\limits_{1/2\leqslant|t|\leqslant 2}\frac{dG_t}{|\operatorname{Im}t+y_1\rho^{-1}|^\alpha|t+e^{i\theta}|}\Biggr).$$

Аналогично тому, как устанавливалось неравенство (5), показывается, что последние интегралы ограничены. Поэтому

$$I_4 < N_4 \rho^{-\alpha}. \tag{8}$$

Из (7), (8) следует (6). Таким образом, из (5) и (6) вытекает, что

$$\|f\|_{C_\beta} = \|f\|_C + \sup \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\beta} \leqslant (M_0 + N_0 |z_1 - z_2|^{1-\alpha-\beta}) \|w\|_C, \quad 0 < \beta \leqslant 1 - \alpha, \tag{9}$$

т. е. оператор T является ограниченным в $C_\beta(\overline{G})$, $0 < \beta \leqslant 1 - \alpha$.

При помощи оценок (5) и (6) легко показать, что оператор T является вполне непрерывным в C_β.

Система (2) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма

$$w(z) - Tw = w_0(z), \tag{10}$$

где $w_0(z)$ — произвольное решение системы Бельтрами $B(w_0) = 0$.

Для решения системы (2) справедливо интегральное представление первого рода [1], с помощью которого легко устанавливается отсутствие нетривиального решения однородного уравнения $w(z) - Tw = 0$. Отсюда следует, что уравнение (10) разрешимо при любой правой части и его решения можно представить в виде

$$w(z) = w_0(z) + \iint\limits_G (\Gamma_1(z, \zeta) w_0(\zeta) + \Gamma_2(z, \zeta) \overline{w_0(\zeta)}) \, dG_\zeta, \tag{11}$$

где $\Gamma_1(z, \zeta)$, $\Gamma_2(z, \zeta)$ — резольвенты уравнения (10).

Представим функцию $w_0(z)$ в виде [3]

$$w_0(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\mu(t) \, dW(t)}{W(t) - W(z)} + ic_0, \tag{12}$$

где $\mu(t)$ — вещественная функция, непрерывная по Гёльдеру на Γ, c_0 — вещественная постоянная, причем в случае $m = 0$ $\mu(t)$ и c_0 определяются однозначно через $w_0(z)$, а в случае же $m \geqslant 1$ c_0 определяется однозначно, а $\mu(t)$ с точностью до произвольных постоянных на $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$.

Представления (11) и (12) позволяют задачу А привести к сингулярному уравнению по контуру Γ относительно $\mu(t)$ и убедиться в справедливости следующих теорем.

Теорема 1. *Однородная задача* А ($h(t) \equiv 0$ *на* Γ) *имеет конечное число* l *линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи* А *необходимо и достаточно конечное число* l' *условий разрешимости на правой части* $h(t)$.

Теорема 2. *Индекс задачи равен*

$$l - l' = 2\varkappa + 1 - m, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg \overline{a(t)}\}_\Gamma.$$

Теорема 3. *Если* $\varkappa < 0$, *то* $l = 0$, $l' = m - 2\varkappa - 1$. *Если же* $\varkappa > m - 1$, *то* $l = 2\varkappa + 1 - m$, $l' = 0$.

В частности, в случае $m = 0$, *если* $\varkappa \geqslant 0$, *то* $l' = 0$.

Отметим, что теоремы 1—3 для случая системы (1) с коэффициентами $\mathcal{A}(z)$ и $\mathcal{B}(z)$ из L_p, $p > 2$, доказаны впервые И. Н. Векуа [1, 2].

Выражаю благодарность А. Джураеву за ценные советы.

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
15 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] *И. Н. Векуа*, Математ. сборн., т. 31, 2 (1952). [3] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. [4] *А. Д. Джураев*, ДАН, т. 185, № 5 (1969).