

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ВОЛЧКА

(Представлено академиком С. Т. Беляевым 27 III 1974)

1. Вращающаяся и деформируемая частица рассматривается в работе (1) как система с 9 внутренними степенями свободы, описываемыми матрицей κ_{ik} . Уравнение Шредингера ее инерционного движения имеет вид

$$\hat{H}\psi = (\hat{T} + U)\psi = E\psi, \quad \hat{T} \equiv -\frac{\hbar^2}{j_k^0} \Delta_k, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \kappa_{n1} \partial \kappa_{n1}}, \quad (4,1)$$

$$U = \frac{1}{2} V_0 \lambda (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 3)^2 + W, \quad W \equiv V_{0\mu} \mathcal{E}_{ik} \mathcal{E}_{ik}, \\ \mathcal{E}_{ik} \equiv (\kappa_i, \kappa_k) - \delta_{ik} - \varepsilon_{ik}^0. \quad (4,2)$$

Полный угловой момент частицы

$$M = l + m + n, \quad l \equiv [\kappa_1, p_1], \quad m \equiv [\kappa_2, p_2], \quad n \equiv [\kappa_3, p_3]. \quad (4,3)$$

$\kappa_k \equiv \kappa_{nk} e_n$, где e_n — орты по осям инерциальной системы, совмещенным с главными осями инерции частицы в основном состоянии (т. е. не деформированной и не вращающейся); начало координат системы в центре масс. p_k — моменты, канонически сопряженные κ_k . \hat{H} имеет вид оператора Гамильтона трех взаимодействующих «квазичастиц», причем три степени свободы каждой подобны трем внутренним степеням свободы двухатомной молекулы; такой же вид имеет M .

В пространстве κ вводим сферические координаты, заменяя κ_{ik} на κ_k, v_k, φ_k , затем заменяем $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ на η_1, η_2 ; $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 3 \equiv \varepsilon$ — сжимаемость частицы. Переменные можно частично разделить, отделив η_1, η_2 и ε — колебательные степени свободы, не дающие вклада в угловой момент, зависящий только от v_k, φ_k . Оператор \hat{H} преобразуется к виду

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \Delta H, \quad \hat{H}_0 \equiv H_1(\eta_1) + H_2(\eta_2) + H_3(\varepsilon) + H_0(v), \quad (4,4)$$

$$H_0(v) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{l}^2}{j_1^0} + \frac{\hat{m}^2}{j_2^0} + \frac{\hat{n}^2}{j_3^0} \right) + 2V_{0\mu} (\cos^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1). \quad (4,5)$$

θ_3 — угол между κ_1 и κ_2 , так что $\cos \theta_3 = \cos v_1 \cos v_2 + \sin v_1 \sin v_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, и справедливы аналогичные выражения для θ_2 и θ_1 . $H_0(v)$ — оператор Гамильтона обобщенного волчка (механической системы с 6 угловыми степенями свободы), кинетическая энергия которого обращается в нуль вместе с угловым моментом.

Спектр энергии деформируемого волчка получается в виде

$$E = \hbar \omega_1 (n_1 + 1/2) + \hbar \omega_2 (n_2 + 1/2) + \hbar \omega_\varepsilon (n_\varepsilon + 1/2) + E_{0.v} + \langle |\Delta H| \rangle. \quad (4,6)$$

$$\omega_k^2 \equiv 8V_{0\mu} A_k J_0^{-1}, \quad k=1, 2, \quad \omega_\varepsilon^2 \equiv 4V_0 \Lambda C J_0^{-1}. \quad (4,7)$$

A_k — функции инерциальных констант j_k^0 , которые при аксиальной симметрии основного состояния частицы ($j_1^0 = j_2^0$) имеют вид

$$A_1 = J_0 (j_1^0)^{-1}, \quad A_2 = \frac{1}{3} J_0 [(j_1^0)^{-1} + 2(j_3^0)^{-1}]. \quad (4,8)$$

В случае $\Lambda = \lambda + \frac{2}{3}\mu \gg \mu$ возбуждение колебаний плотности высокоэнергетичности и $n_e = 0$ означает несжимаемость.

$E_{\text{о.в.}}$ — энергия обобщенного волчка, определяемая из уравнения

$$H_0(\nu) \Psi(\nu_k, \varphi_k) = E_{\text{о.в.}} \Psi(\nu_k, \varphi_k). \quad (1,9)$$

2. Уравнение (1,9) надо решать совместно с уравнениями моментов

$$\hat{M}^2 \Psi = \hbar^2 I(I+1) \Psi, \quad \hat{M}_z \Psi = \hbar M \Psi. \quad (2,1)$$

Отмечая, что

$$\hat{l}^2 Y_{l m_1}^{(1)} = \hbar^2 l_1(l_1+1) Y_{l m_1}^{(1)}, \quad \hat{l}_3 Y_{l m_1}^{(1)} = \hbar m_1 Y_{l m_1}^{(1)}, \quad (2,2)$$

где $Y_{lm}^{(k)} = Y_{lm}(\nu_k, \varphi_k)$ — шаровые функции, и что аналогичные равенства справедливы для \hat{m}^2 , \hat{m}_z и \hat{n}^2 , \hat{n}_z , составляем произведения $Y_{l_1 m_1}^{(1)} Y_{l_2 m_2}^{(2)} Y_{l_3 m_3}^{(3)}$, из которых можно построить суперпозицией общие собственные функции пяти коммутирующих операторов

$$\hat{M}^2, \quad \hat{M}_z, \quad \hat{l}^2, \quad \hat{m}^2, \quad \hat{n}^2. \quad (2,3)$$

При $j_1^0 = j_2^0$ имеется решение, когда $\hat{n}^2 \Psi = 0$, т. е. $l_3 = 0$ и $l + m = M$; тогда общие собственные функции операторов (2,3)

$$\Psi_0(\nu_k \varphi_k; I M l_1 l_2) = a \sum_{m_1 m_2} (l_1 l_2 m_1 m_2 | I M) Y_{l_1 m_1}^{(1)} Y_{l_2 m_2}^{(2)}, \quad (2,4)$$

$|l_1 - l_2| \leq I \leq l_1 + l_2$. Далее учитываем перестановочную симметрию, вытекающую из условия $j_1^0 = j_2^0$. Показано, что случай $I = l_1 + l_2$ соответствует минимальной, а $I = |l_1 - l_2|$ — максимальной энергии, и они рассмотрены. Симметризованные и нормированные функции для случая $I = l_1 + l_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \Psi^\pm(\nu_k \varphi_k; I M l) = \\ & = a \sum_{m_1 m_2} (l l - l, m_1 m_2 | I M) [Y_{l m_1}^{(1)} Y_{l-l, m_2}^{(2)} \pm Y_{l m_1}^{(2)} Y_{l-l, m_2}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (2,5)$$

Для каждой пары значений I, M имеется $(I+1)$ независимых функций (2,5); если $I = 2k$, то $k+1$ функций Ψ^+ , $l=0, 1, \dots, k$, и k функций Ψ^- , $l=0, 1, \dots, k-1$, а если $I = 2k+1$, то имеется $k+1$ тех и других.

3. Уравнение обобщенного волчка (1,9), (1,5) при $j_1^0 = j_2^0$ решается методом, примененным О. Клейном⁽³⁾. Составляем матрицу $H_0(\nu)$, которую диагоналируем. Класс функций, на которых составляется матрица $H_0(\nu)$ — это (2,5), а именно: $l=0, 1, \dots, k$, где $k = \frac{1}{2}I$ или $k = \frac{1}{2}(I-1)$. Решение имеет вид суперпозиции функций (2,5) с искомыми коэффициентами C_n^\pm . Спектр $E_{\text{о.в.}}$ имеет вид

$$E_{\text{о.в.}} = \hbar^2 (2j_1^0)^{-1} [\varepsilon(I M_\alpha) + \alpha], \quad \alpha = 4V_0 \mu j_1^0 \hbar^{-2}, \quad (3,1)$$

где $\varepsilon(I M_\alpha)$ — корни секулярного уравнения, нормированные $(\varepsilon)_{I=0} = 0$. Вырождение по $|M|$ снимается, остается только по знаку $\pm M$.

Для каждой пары значений $I, |M|$ имеется два секулярных уравнения, дающих корни

$$\varepsilon_s^+(I, |M|, \alpha), \quad \varepsilon_n^-(I, |M|, \alpha). \quad (3,2)$$

Количество корней в мультиплетах (3,2) следующее: при $I = 2k$ имеется $s=1, 2, \dots, k+1$ уровней Ψ^+ и $n=1, 2, \dots, k$ уровней Ψ^- , а при $I = 2k+1$ — одинаковое число $(k+1)$ тех и других. Для каждой пары $I, |M|$ мультиплет (3,2) содержит $(I+1)$ уровень; в этом сходство с симметрическим твердым волчком, однако эти уровни различаются не квантовым числом

K — проекцией углового момента на ось симметрии (которой деформируемый волчок не имеет), а является корнями секулярного уравнения — в этом сходство с асимметрическим твердым волчком.

Уровни (3,2) зависят от одной физической константы α , причем вычисления показывают, что эта зависимость быстро уменьшается с возрастанием I , поэтому имеет смысл предельный случай $\alpha \rightarrow 0$. Тогда уравнение (1,9) принимает вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{l}^2 + \hat{m}^2}{j_1^0} + \frac{\hat{n}^2}{j_3^0} \right) \Psi = E_{\text{лнм}} \Psi; \quad (3,3)$$

оно похоже на уравнение Шредингера твердого симметрического волчка, однако имеется два отличия: инерционные параметры j_k^0 не равны I_k — моментам инерции вращения ($j_1^0 = 1/2 I_3$, $j_3^0 = I_1 - 1/2 I_3$) и \hat{l}^2 , \hat{m}^2 , \hat{n}^2 не равны квадратам проекций M на оси, связанные с телом. Кроме того, оси в (3,3) — это не вращающиеся оси. Функции (2,5) являются решением уравнения (3,3) и его спектр —

$$E_{\text{лнм}}(l) = \hbar^2 (2j_1^0)^{-1} [l(l+1) + (I-l)(I-l+1)], \quad l=0, 1, \dots, I, \quad (3,4)$$

т. е. l является интегралом движения при $\alpha=0$. Максимальная энергия соответствует $l=0$ и равна $\hbar^2 (2j_1^0)^{-1} I(I+1)$, т. е. имеет вид энергии симметрического твердого волчка при $K=0$, однако $j_1^0 = 1/2 I_3$. Спектр (3,2) не является чисто ротационным, ибо три вращательные степени свободы не отделены от деформаций сдвига, он ротационно-деформационный, однако $E_{\text{о.в.}}=0$ при $I=0$.

Применительно к ядрам подробно рассмотрен спектр при $I=2k$. При этом система уравнений для C_n^\pm распадается на две: одна содержит C_n^\pm с четными n , а другая — с нечетными. Поэтому (3,2) распадается на 4 группы:

$$\varepsilon_s^+(IM_{\text{чт}}, \alpha), \quad \varepsilon_{s'}^+(IM_{\text{нч}}, \alpha), \quad \varepsilon_n^-(IM_{\text{чт}}, \alpha), \quad \varepsilon_{n'}^-(IM_{\text{нч}}, \alpha), \quad (3,5)$$

причем номера s, s', n, n' уровней принимают значения: при k четном: $s=1, 2, \dots, k/2+1$; $s', n, n'=1, \dots, k/2$; при k нечетном; $s, s', n'=1, 2, \dots, 1/2(k-1)$; $n=1, 2, \dots, 1/2(k-1)$. Верхние значения индексов s, s', n, n' суть степени полиномов, корнями которых являются энергии (3,5), сумма их значений $(I+1)$. Для ротационно-деформационной полосы на основном уровне O^+ , когда в спектре (1,6) $n_1=n_2=n_3=0$, Ψ — симметрическая функция, вычислены таблицы $\varepsilon_s^+(I_{\text{чт}}, \alpha)$ при $M=I$ и $M=0$ для $I=0, 2, \dots, 18$ и $\alpha=0, 2, \dots, 100$. Значения $\varepsilon^+(I_{\text{чт}}, \alpha)$ по отношению к $\alpha=0$ смещаются, причем наибольшие уровни для каждого I (называемые главной серией) повышаются с возрастанием α и тем медленнее, чем больше I ; для $I>10$ это повышение пренебрежимо, так что главная серия примыкает к спектру (3,4) при $l=0$, т. е. с возрастанием I , спектры различных частиц сближаются, сходясь к универсальному.

Развитая теория применима к молекулам и к четно-четным ядрам. Для сравнения уровней с наблюдаемыми, мы располагаем параметрами j_1^0 и α , значения которых надо брать из опыта. Величина множителя $\hbar^2 (2j_1^0)^{-1}$ для молекул порядка 1 эв, а для ядер 10 кэв. Рассмотрен случай $I=|l_1-l_2|$, содержащий, в частности, группу O^+ -состояний при $I=0$, когда $l_1=l_2 \neq 0$. Отметим, что уравнение Шредингера решено в определенной системе отсчета, в ней разделены переменные так, что в (1,4) члены H_1, H_2 и $H_0(v)$ в отдельности не инварианты. Поэтому при сравнении с опытом найденное решение $\psi(\varepsilon, I, M)$ надо повернуть к произвольной системе отсчета:

$$\sum_M \psi(\varepsilon, I, M) D_{MM'}^I(\alpha, \beta, \gamma) = \psi_{\text{лаб}}(\varepsilon, I, M'), \quad (3,6)$$

α, β, γ — эйлеровы углы, определяющие ориентацию главных осей инерции частицы в основном состоянии. Составляя $\langle |\dot{H}| \rangle$ по состояниям (3,6), надо произвести осреднение по углам α, β, γ , ибо значения их равновероятны.

4. В решении задачи возможен другой подход, если деформации \mathcal{E}_{ik} и δ_k' , [$j_k^0 = 1/2 J_0 (1 + 2\delta_k')$] малы и пренебречь их вторыми степенями сравнительно с 1. Тогда можно решать уравнение Шредингера в \mathcal{E}_{ik} -представлении, используя метод последовательных приближений, введенный в (4); при этом в (1,3) $M = M_{\text{rot}} + M_{\text{dt}}$, и M_{rot} — угловой момент вращения и M_{dt} — угловой момент деформации удовлетворяют требуемым перестановочным соотношениям и в отдельности могут быть интегралами движения. Решение дает ротационно-деформационный спектр, отличный от полученного выше, подтверждающий основные черты квазиклассического, найденного в (2). Этот подход интересен тем, что позволяет провести сравнение с теорией О. Бора — Б. Моттельсона (О.Б.—М.). В работе (2) найдена взаимно однозначная связь переменных теории тела однородной деформации (т.о.д.) с переменными $\alpha_{2\mu}$ (5) и показано, что кинетическая энергия и угловой момент т.о.д. при безвихревом движении совпадают с выражениями теории О.Б.—М. При наличии «эффективной анизотропии» деформированных ядер потенциальная энергия т.о.д. (при несжимаемости) имеет вид

$$U = 1/8 V_0 [(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2) + 2\Lambda_3 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2], \quad (4,1)$$

\mathcal{E}_k — компоненты \mathcal{E}_{ik} в диагональной форме. При $\Lambda_1 = \Lambda_3 = 8\mu$ (4,1) совпадает с (1,2). Легко показать, что (4,1) совпадает с потенциальной энергией О.Б.—М. в работе (6) при следующем соотношении между константами:

$$C_0 = \frac{5}{8\pi} V_0 (\Lambda_1 + 2\Lambda_3), \quad C_2 = \frac{15}{8\pi} V_0 \Lambda_1. \quad (4,2)$$

Таким образом, теория т.о.д. есть обобщение теории О. Бора — Б. Моттельсона на вихревое движение и большие деформации. В работе (7) показано, что в теории О.Б.—М. (с выражением А. Давыдова (8) для потенциальной энергии) ротационной полосы не получается. Она получена в (5, 8) при использовании аналогии с движением жидкости во вращающейся твердой оболочке. Эта аналогия создала мнение, что «волновое вращение» О. Бора (5) (вращение осей деформации с угловой скоростью \mathbf{q}) происходит так же, как действительное вращение (вихревое движение с $\mathbf{\Omega} = 1/2 \text{rot } \mathbf{U}$), только «твердотельные» моменты инерции надо заменить на «гидродинамические». В (7) показано существенное отличие свойств \mathbf{q} и $\mathbf{\Omega}$, в результате которого, при безвихревом движении не получается ротационной полосы.

Дальневосточный государственный университет
Владивосток

Поступило
8 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Невзглядов, ДАН, т. 141, 59 (1962). ² В. Г. Невзглядов, Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру, Владивосток, 1970.
³ O. Klein, Zs. Phys., В. 58, 730 (1929). ⁴ В. Г. Невзглядов, ДАН, т. 186, 1298 (1969).
⁵ О. Бор—Б. Моттельсон, Сборн. Пробл. совр. физики, № 9 (1955); № 1 (1956).
⁶ M. Danos, W. Greiner, Phys. Rev., v. 134, № 213, 284 (1964). ⁷ В. Г. Невзглядов, ДАН, т. 202, 1292 (1972). ⁸ А. С. Давыдов, Возбужденные состояния атомных ядер, 1967.