УДК 621.039.514.23

О переходных состояниях реактора при перегрузке тепловыделяющих элементов

В. Бартошек

(*Институт ядерных исследований ЧСАН, Прага — Ржеж*)

Рассматривается взаимосвязь между продолжительностью переходного состояния реактора (с точки зрения как перегрузки, так и реактивности), требуемой радиационной стойкостью твэлов, достигаемым облучением горючего и необходимой скоростью перегрузки твэлов для различных режимов. В частности, сравниваются преимущества и недостатки равновесного перехода, перехода с задержкой перегрузки при ее постоянной скорости, перехода с постоянной реактивностью и различные комбинации этих переходов. Рассматриваются режимы, которые (по сравнению с равновесным облучением) допускают экономию запаса реактивности за счет непереоблучения твэлов.

Введение

Если твэлы во время своего нахождения в реакторе не меняют положения, то наибольшую глубину выгорания горючего можно получить при осуществлении режима с непрерывной перегрузкой твэлов [1]. Выгоревшие твэлы поочередно и непрерывно заменяются свежими. Очевидно, что при этом в реакторе постоянно находятся твэлы с различной степенью выгорания. Режим непрерывной перегрузки отличается тем преимуществом, что при том же запасе реактивности на выгорание во всех твэлах достигается одинаковое выгорание горючего, на несколько десятков процентов больше среднего, достигаемого при одновременной замене всех твэлов в реакторе. В режиме непрерывной перегрузки реактор находится в некотором равновесном состоянии. Однако в новый реактор загружаются, как правило, свежие твэлы, которые после пуска реактора выгорают пропорционально местному потоку. Поэтому равновесное состояние не наступает само по себе, а может быть получено в результате определенного порядка перегрузки.

В настоящей работе рассматривается перевод реактора из начального в равновесное состояние, а также наиболее важные физические показатели различных схем этого перехода, основанных на предположении, что перегрузка одного твэла вызывает пренебрежимо малый скачок реактивности всего реактора по сравнению с запасом реактивности на выгорание и что пространственное распределение потока нейтронов постоянно и не зависит от глубины выгорания твэла в данной точке.

1. Коэффициент размножения нейтронов в переходном состоянии

Предположим, что известна зависимость относительного коэффициента размножения для одного твэла $k(s) = \frac{k_{\text{эфф}}(s)}{k_{\text{эфф}}(0)}$ от полученного им среднего интегрального потока нейтронов:

$$s = 10^{-21} \int_0^t \Phi(t')\, dt'$$

(за единицу интегрального потока примем 10^{21} *нейтр/см*^{2}, а общий интегральный поток будем называть облучением). Тогда относительный коэффициент размножения системы в течение времени от облучения s_0 до облучения s определяется выражением

$$k_1(s) = k(s)\left(1 - \int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{S_1(s')}\right) + \int_{s_0}^{s} \frac{k(s-s')}{S_1(s')}\, ds', \quad (1)$$

где $S_1(s')$ — период перегрузки, выраженный в единицах облучения и определяющий скорость перегрузки твэлов. Уравнение (1) можно вывести из следующих рассуждений. Поскольку через элементарный интервал облучения ds' перегружается $ds'/S_1(s')$ твэлов, то первый интеграл в правой части выражения (1) характеризует вклады старых твэлов в коэффициент размножения, второй—вклад свежих твэлов, так как при облучении s коэффициент размножения доли элементов $ds'/S_1(s')$, загруженных при облучении s', составляет $k(s-s')$; интегрированием получим суммарный вклад в коэффициент размножения.

Перегрузка первой загрузки заканчивается при облучении, которое определяется выражением

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{S_1(s)} = 1. \quad (2)$$

При постоянной скорости перегрузки очевидно, что $s_1 = s_0 + S_1$. Среднее выгорание твэлов $\bar{s}_1$ первой загрузки можно представить так:

$$\bar{s}_1 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{s\, ds}{S_1(s)}, \quad (3)$$

т. е. при постоянной скорости перегрузки $\bar{s}_1 = \frac{1}{2}(s_0 + s_1)$.

Коэффициент размножения нейтронов при второй и последующих перегрузках состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое обусловливается твэлами, загруженными при первой (предшествующей) перегрузке:

$$\int_{s'''}^{s_1} k(s - s') \frac{ds'}{S_1(s')},$$

где s''' — облучение, при котором в реактор загружается твэл, извлекаемый при достижении облучения s. Второе слагаемое обусловливается твэлами, загруженными в реактор при второй (настоящей) перегрузке со скоростью, которая характеризуется периодом $S_2(s'')$:

$$\int_{s_1}^{s} k(s - s'') \frac{ds''}{S_2(s'')},$$

поэтому коэффициент размножения нейтронов в реакторе, перегружаемом второй раз, определяется выражением

$$k_2(s) = \int_{s'''}^{s_1} k(s - s') \frac{ds'}{S_1(s')} + \int_{s_1}^{s} k(s - s'') \frac{ds''}{S_2(s'')}. \quad (4)$$

Зависимость s''' от s следует из условия сохранения числа твэлов в реакторе при перегрузке:

$$\int_{s_1}^{s} \frac{ds''}{S_2(s'')} = \int_{s_0}^{s'''} \frac{ds'}{S_1(s')} = 1 - \int_{s'''}^{s_1} \frac{ds'}{S_1(s')}. \quad (5)$$

Среднее выгорание твэлов, извлеченных во время второй перегрузки, определяется формулой

$$\bar{s}_2 = \int_{s_1}^{s_2} (s - s''') \frac{ds}{S_2(s)}. \quad (6)$$

Если скорость перегрузки постоянна, то для облучения, при котором заканчивается вторая перегрузка, из выражения (5) получим $s_2 = s_1 + S_2$; для среднего облучения второй загрузки из выражений (5) и (6) следует, что

$$\bar{s}_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2).$$

2. Равновесный переход

Наиболее простой переход в равновесное состояние такой, при котором с начала пуска реактора твэлы перегружаются с постоянной скоростью, равной равновесной. Зависимость коэффициента размножения при первой перегрузке получим, если в выражении (1) примем $s_0 = 0$ и $S_1 = S_r$, где S_r — облучение твэлов при равновесном режиме (или период перегрузки всех твэлов в равновесном состоянии). Коэффициент размножения в конце первой равновесной перегрузки определяется выражением

$$k_1(S_r) = \frac{1}{S_r} \int_0^{S_r} k(s)\, ds.$$

В дальнейшем этот коэффициент размножения остается постоянным, в чем можно убедиться, подставляя $S_1 = S_2 = S_r$ в выражение (4). Среднее облучение первой загрузки согласно выражению (3) равно $\bar{s}_1 = \frac{S_r}{2}$, а второй согласно (6) составляет $\bar{s}_2 = S_r$. Для реакторов на природном уране зависимость коэффициента размножения твэла (в двумерной бесконечной решетке) от облучения может быть приблизительно выражена следующим образом:

$$k(s) = 1 + \alpha s + \beta s^2. \quad (8)$$

При равновесном режиме перегрузки зависимость коэффициента размножения от облучения принимает вид

$$k_r(S_r) = 1 + \frac{\alpha}{2} S_r + \frac{\beta}{3} S_r^2. \quad (9)$$

Для случаев, когда величина $\alpha \ll \beta$, можно принять

$$k(s) \approx 1 + \beta s^2. \quad (8')$$

С учетом этого для области с постоянным потоком нейтронов получим $S_r = \sqrt{3}\, s = 1{,}73 s$, т. е. облучение твэлов при непрерывной перегрузке на $\sim 70\%$ выше, чем при одновременной.

3. Переход с задержкой перегрузки

Получение для первой загрузки выгорания горючего, составляющего половину от равновесного выгорания, является отрицательной стороной равновесного перехода. Это объясняется тем, что твэлы извлекаются из реактора с начала его пуска. Твэлы можно использовать лучше, если задержать их в реакторе до некоторого облучения s_0, а затем начать извлечение с такой постоянной скоростью S_1, чтобы реактивность реактора не падала ниже запаса реактивности на выгорание. Из бесконечно возможных режимов перегрузки подобного рода в работе [2] отыскивается такой, при котором достигается наибольшее облучение первых двух загрузок. Приведем кратко эти рассуждения. Найдем такое значение облучения s_0 и такую скорость перегрузки S_1, чтобы облучение первых двух загрузок было максимальным:

$$\bar{s}_1 + \bar{s}_1 \equiv \bar{s}_{12} = s_0 + S_1 + \frac{S_r}{2} = \text{макс!} \qquad (10)$$

с условием, что при облучении s коэффициент размножения нейтронов минимален и определяется запасом на выгорание C:

$$k_1(s_m) \equiv k(s_m)\left(1 - \frac{s_m - s_0}{S_1}\right) + \\ + \frac{1}{S_1}\int\limits_0^{s_m - s_0} k(z)\,dz = 1 - C. \qquad (11)$$

Облучение s_m, соответствующее минимуму $k_1(s)$, дается уравнением

$$k_1'(s_m) \equiv \left(1 - \frac{s_m - s_0}{S_1}\right) k'(s_m) + \\ + \frac{k(s_m - s_0) - k(s_m)}{S_1} = 0. \qquad (12)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, построим функцию:

$$M(s_m, s_0, S_1) = \bar{s}_{12}(s_0, S_1) + \lambda[k_1(s_m, s_0, S_1) - \\ - 1 + C] + \mu k_1'(s_m, s_0, S_1), \qquad (13)$$

частные производные которой по s_m, s_0, S_1 должны равняться нулю:

$$\frac{\partial M}{\partial s_0} \equiv 1 + \lambda\frac{\partial k_1}{\partial s_0} + \mu\frac{\partial k_1'}{\partial s_0} = 0; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial S_1} \equiv 1 + \lambda\frac{\partial k_1}{\partial S_1} + \mu\frac{\partial k_1'}{\partial S_1} = 0; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s_m} \equiv \lambda\frac{\partial k_1}{\partial s_m} + \mu\frac{\partial k_1'}{\partial s_m} = 0, \qquad (16)$$

что вместе с (11) и (12) определяет λ, μ, s_m, S_1 и s_0.

Так как из (12) $\frac{\partial k_1}{\partial s_m} = 0$, то из (16) следует, что $\mu = 0$, поскольку на основании предположения о минимуме имеем $\frac{\partial k_1'}{\partial s_m} \equiv \frac{\partial^2 k_1}{\partial s_m^2} \neq 0$. Подставляя $\mu = 0$ в (14) и (15), получим

$$k(s_m - s_0) = 1 - C \equiv k(s_j),$$

где s_j — облучение твэлов при одновременной перегрузке с тем же запасом реактивности на выгорание C. Отсюда следует, что $s_j = s_m - s_0$ и $S_1 - (s_m - s_0) \equiv S_1 - s_j = s_1 - s_m$. Из (11) и (12) после некоторых преобразований можно вывести уравнения, определяющие s_m, s_0, S_1 как функцию s_j (или S_r):

$$\frac{[k(s_m) - k(s_j)]^2}{k'(s_m)} = s_j^2 k(s_j) - \int\limits_0^{s_j} k(z)\,dz; \qquad (17)$$

$$S_1 - s_j = s_1 - s_m = \frac{k(s_m) - k(s_j)}{k'(s_m)}. \qquad (18)$$

Чтобы найти численные значения этих величин, подставим (8') в (17) и получим

$$\left[\left(\frac{s_m}{s_j}\right)^2 - 1\right]^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{s_m}{s_j},$$

откуда

$$s_m = 1{,}56 s_j = 0{,}90 S_r$$

и

$$s_0 = 0{,}56.$$

Из (18) тогда найдем

$$s_1 = 2{,}02 s_j = 1{,}17 S_r;$$

$$S_1 = s_1 - s_0 = 1{,}46 s_j = 0{,}84 S_r.$$

Среднее облучение первой загрузки $\bar{s}_1 = 0{,}75 S_r$, а первых двух загрузок, если во время второй перегрузки перейти на равновесный режим,

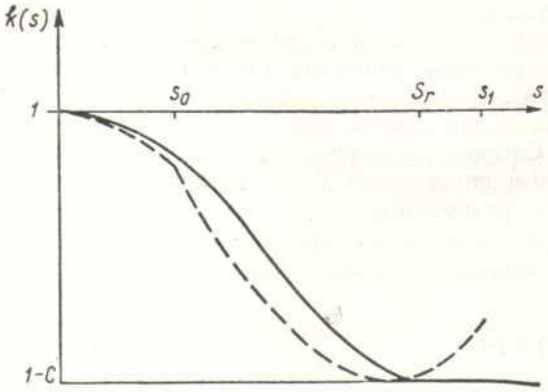

Рис. 1. Изменение коэффициента размножения для различных режимов перехода в равновесное состояние.

$\bar{s}_{12} = 1{,}67 S_r$. На рис. 1 приведен качественный ход изменений коэффициента размножения нейтронов для равновесного перехода (сплошная линия) и перехода с оптимальной задержкой перегрузки (пунктирная линия). При оценке переходного состояния следует иметь в виду следующие физические параметры, влияющие на технические и экономические показатели реактора:

1) общую продолжительность переходного состояния с точки зрения перегрузки и реактивности;

2) требуемую радиационную стойкость твэлов;

3) достигаемое облучение горючего;

4) необходимую скорость перегрузки твэлов.

Равновесный переход хорошо соответствует всем этим параметрам, за исключением третьего. Некоторого повышения облучения ($\overline{s_{12}} = 1{,}67 S_r$) можно добиться при режиме с задержкой перегрузки. Однако в этом случае необходимо, чтобы радиационная стойкость 20% твэлов $\left(\frac{s_1 - S_r}{S_1} = 20\%\right)$ на 17% ($s_1 = 1{,}17 S_r$), а скорость первой перегрузки — на 16% ($\sim 1/S_1$) были выше, чем при равновесной перегрузке.

Для достижения максимального облучения твэлов первой загрузки следует полностью использовать запас реактивности на выгорание. Это можно осуществить при переходе с постоянной реактивностью за счет переменной скорости перегрузки.

4. Переход с постоянной реактивностью

Цепная реакция может проходить без перегрузки твэлов до облучения s_0, которое определяется условием $k(s_0) = 1 - C$, если запас реактивности реактора на выгорание составляет C. Дальнейшая работа реактора возможна лишь после замены выгоревших твэлов свежими. Скорость перегрузки, характеризуемая периодом перегрузки $S_1(s)$, должна быть такой, чтобы реактивность оставалась постоянной или возрастала, т. е. для $s \geqslant s_0$ должно быть справедливым неравенство

$$k_1(s) \equiv k(s) + \int_{s_0}^{s} \frac{k(s-s') - k(s)}{S_1(s')}\, ds' \geqslant 1 - C. \qquad (19)$$

Для режима с постоянной реактивностью должно быть

$$\frac{dk_1(s)}{ds} = k'(s) + \int_{s_0}^{s} \frac{\partial}{\partial s'}\,[k(s-s') - k(s)] \times \frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{k(0) - k(s)}{S_1(s)} = 0. \qquad (20)$$

Вычисляя производную от (20), получим

$$\frac{d^2 k_1(s)}{ds^2} = k''(s) + \int_{s_0}^{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2}[k(s-s') - k(s)]\,T(s')\,ds' + T(s)\frac{\partial}{\partial s}[k(s-s') - k(s)]\Big|_{s'=s} + T'(s)\,[k(0) - k(s)] - T(s)\,k'(s) = 0, \qquad (21)$$

где $T(s) = \frac{1}{S_1(s)}$.

Используя формулу (8), найдем

$$k(s-s') - k(s) = s'(-\alpha - 2\beta s + \beta s');$$

$$\frac{\partial}{\partial s}[k(s-s') - k(s)] = -2\beta s';$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[k(s-s') - k(s)] = 0.$$

Подставляя эти выражения в (21), получим дифференциальное уравнение

$$T'(s) + T(s)\left(\frac{3\beta}{\beta s + \alpha} + \frac{1}{s}\right) - \frac{2\beta}{s(\beta s + \alpha)} = 0, \qquad (22)$$

общее решение имеет вид

$$T(s) = \frac{1}{s}\left[\frac{2}{3} + \frac{c}{(\beta s + \alpha)^3}\right]. \qquad (23)$$

Постоянную c определим из начального условия, следующего из (20) для $s = s_0$:

$$T(s_0) = \frac{k'(s_0)}{k(s_0) - k(0)},$$

так что

$$c = \beta^3\left(s_0 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{s_0}{s_0 + \frac{\alpha}{\beta}}\right) = \beta^3 \bar{c}.$$

При перегрузке, начинающейся с облучения s_0 и проводящейся так, чтобы реактивность системы оставалась постоянной, зависимость периода перегрузки $S_1(s)$ (характеризующего скорость перегрузки) от облучения имеет вид

$$\frac{1}{S_1(s)} = \frac{3}{s}\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{s_0 + \bar{\alpha}}{s + \bar{\alpha}}\right)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{s_0}{s_0 + \bar{\alpha}}\right)\right], \qquad (23')$$

где $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Подставляя (23) в (19), можно убедиться, что $k_1(s) = k(s_0)$ в течение всей первой перегрузки $s = s_0 \div s_1$. Ее конец определяется условием (2):

$$1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{\bar{c}}{\bar{\alpha}^3}\right) \ln \frac{s_1}{s_0} - \frac{\bar{c}}{\bar{\alpha}^2} \ln \frac{s_1 + \bar{\alpha}}{s_0 + \bar{\alpha}} + \frac{\bar{c}}{2\bar{\alpha}} \left[\frac{1}{(s_1 + \bar{\alpha})^2} - \frac{1}{(s_0 + \bar{\alpha})^2}\right] + \frac{\bar{c}}{\bar{\alpha}^2} \left(\frac{1}{s_1 + \bar{\alpha}} - \frac{1}{s_0 + \bar{\alpha}}\right). \qquad (2')$$

Среднее облучение твэлов, извлеченных из реактора во время первой перегрузки, согласно (3) составит

$$\bar{s}_1 = \frac{2}{3}(s_1 - s_0) + \frac{\bar{c}}{2} \left[\frac{1}{(s_0 + \bar{\alpha})^2} - \frac{1}{(s_1 + \bar{\alpha})^2}\right]. \qquad (3')$$

Для получения качественных соотношений воспользуемся приближенным выражением (8′). Тогда зависимость периода перегрузки от облучения будет иметь вид

$$\frac{1}{S_1(s)} = \frac{2}{3s}\left(1 + 2\frac{s_0^3}{s^3}\right), \qquad (23'')$$

а условие для конца первой перегрузки находится из трансцендентного уравнения

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3x^3} = \ln x,$$

корень которого $x \equiv \frac{s_1}{s_0} = 2{,}41$ ($s_1 = 1{,}39 S_r$). Для периода в конце первой перегрузки получим

$$\frac{1}{S_1(s_1)} = \frac{2}{3s_1}\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) = \frac{0{,}32}{s_0},$$

т. е. $S_1(s_1) = 3{,}16 s_0 = 1{,}83 S_r$, а период в начале первой перегрузки $S_1(s_0) = \frac{s_0}{2} = 0{,}29 S_r$. Среднее выгорание в первом цикле составит

$$\bar{s}_1 = \frac{2}{3} x s_0 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = 1{,}49 s_0 = 0{,}86 S_r.$$

Если при таком режиме работы реактивность не должна падать на протяжении второй перегрузки, то необходимо выполнение равенства

$$\frac{dk_2}{ds} = \int_{s'''}^{s_1} \frac{\partial k(s - s')}{\partial s} \cdot \frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{k(0) - k(s - s''')}{S_2(s)} + \int_{s_1}^{s} \frac{\partial k(s - s'')}{\partial s} \cdot \frac{ds''}{S_2(s'')} = 0. \qquad (24)$$

Это равенство выведено из (4) при использовании соотношения

$$\frac{ds'''}{S_1(s''')} = \frac{ds}{S_2(s)}, \qquad (25)$$

которое получается дифференцированием (5). Для периода перегрузки в начале второго цикла $S_2(s_1)$ из (24) при использовании (20) получим

$$\frac{S_2(s_1)}{S_1(s_1)} = \frac{k(0) - k(s_1 - s_0)}{\int_{s_0}^{s_1} \left.\frac{\partial k(s - s')}{\partial s}\right|_{s = s_1} \frac{ds'}{S_1(s')}} = \frac{k(0) - k(s_1 - s_0)}{k(0) - k(s_1)}. \qquad (26)$$

Из этого соотношения на основании (8′) следует, что $S_2(s_1) = 1{,}08 s_0 = 0{,}62 S_r$.

Так как для получения постоянной реактивности начальный период второго цикла должен быть меньше равновесного, то во время второй перегрузки прямой переход в равновесное состояние невозможен. Решение вопроса о зависимости периода перегрузки от облучения для достижения постоянной реактивности во второй перегрузке приводит к нелинейному уравнению, которое не имеет аналитического решения. Переход в равновесное состояние во втором цикле можно осуществить в смешанном режиме при первой перегрузке.

5. Смешанный переход

Равновесный период в начале второй перегрузки после режима с постоянной реактивностью недостаточен для обеспечения постоянной реактивности во время второй перегрузки, но все-таки во время первой перегрузки имеется некоторый промежуток времени, когда $S_1(s) > S_r$. Обозначим облучение s, при котором $S_1(s) = S_r$, через s_h. Тогда неравенство (19) для первой перегрузки можно удовлетворить, используя смешанный режим перегрузки: в промежутке s_0, s_h осуществляется режим перегрузки с постоянной реактивностью, в промежутке (s_h, s_1) — равновесный режим. Смешанная перегрузка заканчивается при облучении, которое определяется выражением

$$\int_{s_0}^{s_h} \frac{ds}{S_1(s)} + \int_{s_h}^{s_1} \frac{ds}{S_r} = 1, \qquad (27)$$

где s_h определяется из уравнения

$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{s_h}\left(\frac{2}{3} + \frac{\bar{c}}{(s_h + \bar{\alpha})^3}\right),$$

из которого в случае необходимости качественной оценки по уравнению (8′) для $z = \frac{s_0}{s_h}$ получим уравнение

$$z(1+z^3) = 0{,}866,$$

искомый корень которого $z = 0{,}60$, так что $s_h = 1{,}66 s_0 = 0{,}96 S_r$. Для конца первой перегрузки из (27) найдем

$$s_1 = s_h + S_r\left(1 - \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{S_1(s)}\right) = 2{,}23 s_0 = 1{,}29 S_r.$$

Среднее облучение первой загрузки при смешанной перегрузке на основании (8′) $\bar{s}_1 = 1{,}46 s_0 = 0{,}84 S_r$. Таким образом, видно, что достигаемое облучение при смешанной перегрузке ($s_1 = 1{,}29 S_r$; $\bar{s}_1 = 0{,}84 S_r$) немного меньше, чем при перегрузке с постоянной реактивностью ($s_1 = 1{,}39 S_r$; $\bar{s}_1 = 0{,}86 S_r$). Так как во второй части ($s > s_h$) режима с постоянной реактивностью $S_r \leqslant S_1(s)$, то при смешанном режиме реактивность будет немного повышаться, а к концу достигает максимального значения. Следовательно, некоторое снижение реактивности в начале второй перегрузки допустимо.

Коэффициент размножения нейтронов во втором цикле согласно (4) можно представить в виде

$$k_1(s) = \int\limits_{s'''}^{s_h} \frac{k(s-s')}{S_1(s')}\,ds' + \frac{1}{S_r}\int\limits_{0}^{s-s_h} k(s')\,ds'. \qquad (28)$$

Его производная по s

$$k_2'(s) = \int\limits_{s'''}^{s_h} \frac{\partial k(s-s')}{\partial s}\cdot\frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{1}{S_r}\,[k(s-s_h) - k(s-s''')] \qquad (29)$$

в начале второго цикла ($s''' = s_0$; $s = s_1$) принимает вид

$$k_2'(s_1) = \int\limits_{s_0}^{s_h} \frac{\partial k(s-s')}{\partial s}\bigg|_{s=s_1} \frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{1}{S_r}\Big[k\Big(s_1 - s_h) - k(s_1 - s_0)\Big] = 0{,}3\beta S_r, \qquad (30)$$

т. е. реактивность в начале второго цикла падает ($\beta < 0$). Облучение, по-видимому, минимально, когда извлекается последний твэл, загруженный в реактор в период постоянной реактивности ($s = s_h + S_r$), а затем реактивность принимает постоянное значение, равное равновесному. Производная $k_2'(s)$ для $s = s_h + S_r$ и $s''' = s_h$ равна нулю, что указывает на существование экстремума. Вторая производная коэффициента размножения

$$\frac{d^2k_2(s)}{ds^2} = \int\limits_{s'''}^{s_h} \frac{\partial^2 k(s-s')}{\partial s^2}\cdot\frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{1}{S_r}\times$$
$$\times\left[-\frac{\partial k(s-s''')}{\partial s} + \frac{dk(s-s_h)}{ds} - \right.$$
$$\left. - \frac{dk(s-s''')}{d(s-s''')}\left(1 - \frac{S_1(s''')}{S_r}\right)\right] \qquad (31)$$

в точке $s = s_h + S_r$, $s''' = s_h$ приобретает также нулевое значение, что свидетельствует о наличии здесь точки перегиба. В открытом промежутке (s_1, $s_h + S_r$) коэффициент размножения монотонно падает. Если бы здесь была точка экстремума, то в конце второго цикла появился бы максимум (см. разд. 7). Таким образом, о смешанном режиме можно сказать, что он позволяет быстрее перейти на равновесную перегрузку при минимальной потере выгорания твэлов ($\bar{s}_1 = 0{,}84\,S_r$) по сравнению с режимом с постоянной реактивностью ($\bar{s}_1 = 0{,}86 S_r$). Максимальная скорость перегрузки требуется в начале первого цикла, и она примерно в три с половиной раза больше равновесной. Переоблучение 30% твэлов почти на 30% ($s_1 = 1{,}29 S_r$) выше их равновесного облучения. Изменение коэффициента размножения показано на рис. 2.

Выгорание первых двух загрузок дается общей формулой

$$\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \equiv \bar{s}_{12} = \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{s\,ds}{S_1(s)} + \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{s - s'''}{S_2(s)}\,ds, \qquad (32)$$

в которой соотношение между s и s''' определяется условием сохранения числа твэлов (25). Подставляя дифференциалы (25) и заменяя пределы интеграла, можно получить

$$\bar{s}_{12} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{s\,ds}{S_1}. \qquad (33)$$

Это означает, что облучение первых двух загрузок зависит от характеристик второй перегрузки, т. е. от момента ее начала (s_1), конца (s_2) и способа перегрузки $S_2(s)$, но не зависит от характеристик первой перегрузки (если не учитывать, что s_1 — облучение, при котором заканчивается также первая перегрузка). Из (33) следует, что если не переоблучать (по сравнению с равновесным облучением) некоторую часть твэлов, то при переходе на равновесный режим перегрузки половина равновесного выгорания одной загрузки будет потеряна. Если

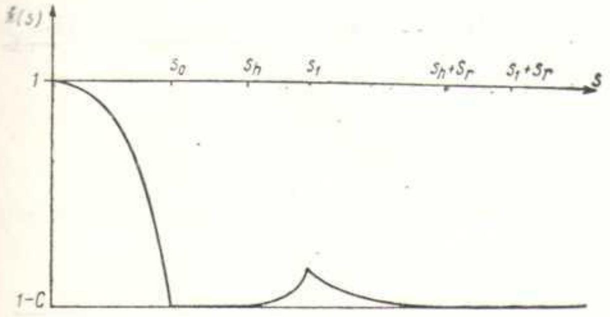

Рис. 2. Изменение коэффициента размножения при смешанном переходе.

перейти на равновесный режим во время второй перегрузки, то без переоблучения твэлов получаются соотношения $s_1 \leqslant S_r$, $s_2 = s_1 + S_r$, $S_2(s) = S_r$, так что

$$\bar{s}_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{s\,ds}{S_2(s)} \leqslant \frac{1}{S_r} \int_{S_r}^{2S_r} s\,ds = \frac{3}{2} S_r.$$

При переходе на равновесный режим в случае извлечения n-й загрузки для облучения n загрузок (s_{1n}) имеем соотношения $s_{n-1} \leqslant (n-1) S_r$; $s_n = s_{n-1} + S_r$; $S_n(s) = S_r$ и

$$s_{1n} = \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{s\,ds}{S_n(s)} \leqslant \frac{1}{S_r} \int_{(n-1)S_r}^{nS_r} s\,ds = S_r\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

При равновесном переходе основная потеря будет происходить во время первой загрузки; при других переходах она распределится между различными загрузками до перехода на равновесный режим. Остановка реактора после равновесного режима, очевидно, тоже связана с потерей половины равновесного выгорания одной загрузки, так как при остановке реактора, когда облучение равно s_n, в лучшем случае n загрузок выгорает на $s_{1n} = S_r\left(n - \frac{1}{2}\right)$, а загрузка $n+1$ выгорает наполовину. Последнюю загрузку можно, конечно, использовать для нового пуска реактора, который в таком случае с самого начала будет работать в равновесном режиме.

6. Переход с постоянным периодом и экономией запаса реактивности на выгорание

Из предыдущих рассуждений следует, что при правильном использовании запаса реактивности в переходном режиме можно добиться лучшего выгорания горючего, чем при равновесном переходе, но всегда только за счет переоблучения некоторой части твэлов. Если равновесное облучение твэла — определяющий фактор, то для выгорания твэлов целесообразно пользоваться не всем запасом реактивности, а сэкономленным для других целей. При первом пуске энергетического реактора можно в начале его работы ожидать внезапные остановки, вызванные ложными сигналами, ошибками персонала и т. д. Режимы с экономией запаса реактивности позволяют увеличить время до попадания реактора в иодную яму и тем самым повысить коэффициент его использования в начальный период.

При одном из таких возможных режимов переход должен осуществляться с постоянной скоростью перегрузки твэлов. Самую большую часть запаса реактивности можно сэкономить, если разность коэффициентов размножения в начале и в минимуме будет минимальной:

$$k(0) - k_1(s_m, s_0, S_1) \equiv k(0) - k(s_m) \times \left(1 - \frac{s_m - s_0}{S_1}\right) - \frac{1}{S_1} \int_0^{s_m - s_0} k(z)\,dz = \min!, \quad (34)$$

где облучение s_m, при котором коэффициент размножения для первой перегрузки принимает минимальное значение, определяется уравнением

$$\left.\frac{dk_1(s, s_0, S_1)}{ds}\right|_{s=s_m} \equiv k'(s_m)\left(1 - \frac{s_m - s_0}{S_1}\right) + \frac{k(s_m - s_0) - k(s_m)}{S_1} = 0. \quad (35)$$

Далее требуется, чтобы ни один твэл не облучался больше, чем на S_r:

$$S_r = s_0 + S_1. \quad (36)$$

Если по методу неопределенных коэффициентов Лагранжа построить функцию

$$N(s_m, s_0, S_1) = k(0) - k_1(s_m, s_0, S_1) + \lambda k_1'(s_m, s_0, S_1) + \mu(-S_r + S_1 + s_0) \quad (37)$$

и приравнять ее частные производные к нулю:

$$\frac{\partial N}{\partial s_m} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial s_0} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial S_1} = 0,$$

то с учетом (35) и (36) получим пять уравнений для пяти неизвестных: s_m, s_0, S_1, λ, μ. Исключая при помощи (35) и (37) коэффициенты λ и μ, получим

$$k(s_m - s_0) = k_1(s_m). \tag{38}$$

Введем обозначение $s_m - s_0 = s_j$ [где s_j — облучение твэлов в режиме одновременной перегрузки с запасом реактивности на выгорание, равным $k(0) - k_1(s_m)$], так что

$$S_1 - (s_m - s_0) = S_1 - s_j = S_r - s_m.$$

Подставляя (38) в (34), найдем

$$k(s_m)(S_1 - s_j) + \int_0^{s_j} k(z)\,dz = k(s_j)\,S_1,$$

и из (35) после умножения на S_1 следует

$$k'(s_m)(S_1 - s_j) = k(s_m) - k(s_j).$$

Из последних двух равенств можно получить выражение

$$\frac{[k(s_m) - k(s_j)]^2}{k'(s_m)} = s_j k(s_j) - \int_0^{s_j} k(z)\,dz, \tag{39}$$

которое надо решать для конкретной зависимости k от s. Из второго уравнения найдем

$$S_1 - s_j = S_r - s_m = \frac{k(s_m) - k(s_j)}{k'(s_m)}. \tag{40}$$

Если в (39) подставить (8′), то получим уравнение

$$\left[\left(\frac{s_m}{s_j}\right)^2 - 1\right]^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{s_m}{s_j}$$

с корнем

$$s_m = 1{,}56 s_j = 1{,}56\,(s_m - s_0),$$

$$s_m = 2{,}78\,s_0.$$

Из (40) определим

$$S_r = s_m\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{s_j}{s_m}\right)^2\right]\right\} = 1{,}29\,s_m,$$

т. е. $s_m = 0{,}75\,S_r$, и $s_j = 0{,}49 S_r$; $s_0 = 0{,}27\,S_r$; $S_1 = S_r - s_0 = 0{,}73 S_r$.

Экономия коэффициента размножения (по отношению к равновесному режиму) составит

$$\frac{k(s_j) - k_r(S_r)}{k(0) - k_r(S_r)} = 0{,}275. \tag{41}$$

Зависимость коэффициента размножения от облучения для такого режима показана на рис. 3.

Итак, при осуществлении режима с экономией запаса реактивности и постоянной скоростью перегрузки равновесное состояние с точки зрения перегрузки твэлов достигается с начала второй перегрузки, а с точки зрения реактивности с конца второй перегрузки. При первой перегрузке экономится не менее 27% запаса

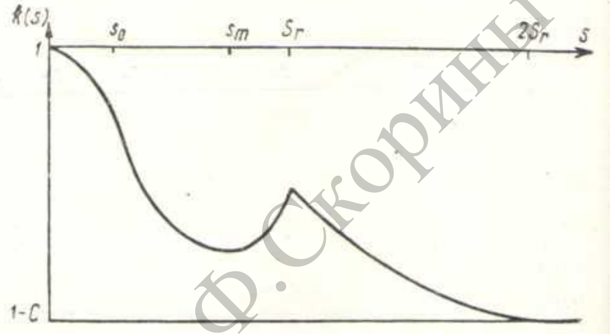

Рис. 3. Изменение коэффициента размножения при переходе с постоянным периодом и экономией запаса реактивности на выгорание.

реактивности на выгорание. Максимальное облучение твэлов не превышает равновесного, вследствие чего облучение первых двух загрузок не превышает облучения при равновесном переходе ($\bar{s}_{12} = 1{,}5 S_r$). Период первой перегрузки $S_1 = 0{,}73 S_r$.

7. Переход с постоянной реактивностью и экономией ее запаса на выгорание

Другой возможный переход с экономией запаса реактивности на выгорание характеризуется тем, что во время перегрузки сохраняется постоянная реактивность и последний извлеченный твэл получает равновесное облучение. Это означает, что в формуле для продолжительности первой перегрузки (2) определена верхняя граница $s_1 = S_r$ и отыскивается облучение s_0, при котором должна начаться перегрузка:

$$\int_{s_0}^{S_r} \frac{ds}{S_1(s)} = \frac{2}{3}\left[\ln\frac{S_r}{s_0} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{s_0^3}{S_r^3}\right)\right] = 1. \tag{2″}$$

Корень уравнения (2″) $S_r = 2{,}41 s_0$ ($s_0 = 0{,}415 S_r$), так что согласно (23″) начальный и конечный периоды перегрузки равны

$$S_1(s_0) = 0{,}21 S_r; \quad S_1(S_r) = 1{,}32 S_r.$$

Относительная экономия запаса реактивности составляет

$$\frac{k(s_0) - k_r(S_r)}{k(0) - k_r(S_r)} = 0{,}485, \tag{42}$$

т. е. почти 50%. Если во время второй перегрузки перейти на равновесный режим, то коэффициент размножения определится выражением

$$k_2(s) = \int_{s'''}^{S_r} \frac{k(s-s')}{S_1(s')}\,ds' + \frac{1}{S_r}\int_{S_r}^{s-S_r} k(s')\,ds', \qquad (43)$$

а его производная по s будет иметь вид

$$k_2'(s) = \int_{s'''}^{S_r} \frac{\partial k(s-s')}{\partial s}\cdot\frac{ds'}{S_1(s')} + \frac{1}{S_r}\times$$

$$\times\,[k(s-S_r) - k(s-s''')]. \qquad (44)$$

При помощи (20) можно найти

$$k_2'(S_r) = \frac{1}{S_r}[k(0) - k(S_r - s_0)] -$$

$$-\frac{1}{S_1(S_r)}[k(0) - k(S_r)],$$

а для (8′) получим $k_2'(S_r) = 0{,}42\beta S_r$, так что реактивность после перехода на равновесный режим перегрузки во втором цикле падает ($\beta < 0$).

В конце второй перегрузки производная коэффициента размножения по (44) равняется нулю $k_2'(2S_r) = 0$, и здесь имеет место экстремум. Чтобы определить его, возьмем другую производную. Она дается выражением (31), в котором произведем замену $s_h \to S_r$. В точке $s = 2S_r$ получим

$$k''(2S_r) = \frac{1}{S_r}\left[-\frac{dk(z)}{dz}\Big|_{z=S_r}\left(1 - \frac{S_1(S_r)}{S_r}\right)\right] < 0. \qquad (45)$$

Это указывает на существование максимума. Так как в точке $s = S_r$ коэффициент размножения убывает, то в промежутке $(S_r,\ 2S_r)$ должен быть еще минимум, в котором реактивность немного меньше равновесной, достигаемой в конце второй перегрузки. Это падение реактивности ниже уровня равновесного значения вызвано некоторым промежутком в конце первой перегрузки, в котором $S_1(s) > S_r$, так что при второй перегрузке облучение части твэлов достигает значения более равновесного.

Таким образом, при рассмотренном переходе равновесный режим перегрузки достигается после равновесного облучения. На протяжении первой перегрузки можно сэкономить почти 50% запаса реактивности на выгорание. При следующей перегрузке реактивность в некотором промежутке падает даже ниже запаса на выгорание. Максимальное облучение твэлов первой загрузки не превышает равновесного значения, но облучение небольшой части твэлов второй загрузки более соответствующего равновесного. Среднее облучение первых двух загрузок такое же, как при равновесном переходе. Самая большая скорость перегрузки отмечается в начале первой перегрузки и примерно в пять раз превышает равновесную. Трудности, которые раньше сказывались при первой перегрузке, при этом режиме имеют место во время второй перегрузки, но они несколько смягчены. Их можно преодолеть, если первую перегрузку осуществлять в смешанном режиме (с экономией запаса реактивности).

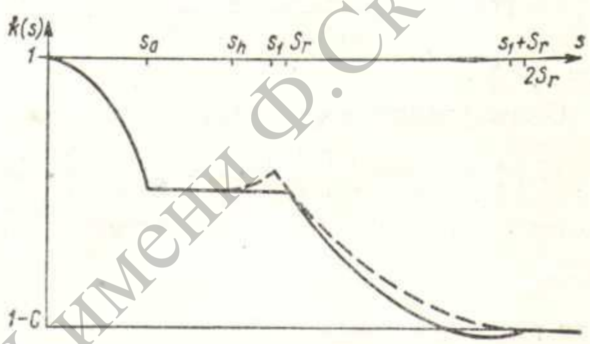

Рис. 4. Изменение коэффициента размножения при переходе с постоянной реактивностью и экономией ее запаса на выгорание.

Это можно сделать только за счет некоторого уменьшения облучения первых двух загрузок (по сравнению с равновесным переходом), так как тогда $s_1 < S_r$, и вследствие этого $\bar{s}_{12} = s_1 + \frac{S_r}{2} < \frac{3}{2}S_r$. Зависимость коэффициента размножения от облучения для этих режимов показана на рис. 4 (пунктир — смешанный режим).

8. Переход с зависимостью реактивности второй степени

Из предыдущего раздела следует, что если реактивность во время второй перегрузки не должна быть ниже равновесного значения, то необходимо, чтобы в формуле (45) $S_1(S_r) \leqslant S_r$. Казалось бы, что для этого достаточно допустить линейную зависимость коэффициента размножения от облучения ($k_1(s) = \gamma + \delta s$) и принять $S_1(S_r) = S_r$.

При таком способе перегрузки реактивность падает ниже равновесного значения не при второй, а при первой перегрузке, поэтому таким образом проблему решить нельзя. Следовательно, зависимость периода первой перегрузки от облучения нужно искать с таким расчетом, чтобы коэффициент размножения описывался кривой второй степени

$$k_1(s) = \gamma + \delta s + \varepsilon s^2 \qquad (46)$$

и чтобы период в конце первой перегрузки имел равновесное значение $S_1(S_r) = S_r$.

Из условия (46) для $T(s) = \frac{1}{S_1(s)}$ получим уравнение

$$-k_1''(s) = T'(\alpha + \beta s)s + T(\alpha + 4\beta s) - 2\beta = -2\varepsilon,$$

т. е.

$$T'(s) + T(s)\frac{4s + \bar{\alpha}}{s(s + \bar{\alpha})} + \frac{2(\bar{\varepsilon} - 1)}{s(s + \bar{\alpha})} = 0, \qquad (47)$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\beta}$.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T(s) \equiv \frac{1}{S_1(s)} = \frac{1}{s}\left[\frac{2}{3}(1 - \bar{\varepsilon}) + \frac{\bar{c}}{(s + \bar{\alpha})^3}\right]. \qquad (48)$$

Условие $S_1(S_r) = S_r$ определяет постоянную $\bar{c}$:

$$\bar{c} = \left[1 - \frac{2}{3}(1 - \bar{\varepsilon})\right](S_r + \bar{\alpha})^3. \qquad (49)$$

Для полного решения требуется, чтобы

$$k_1(s_0) = k(s_0); \qquad (50)$$

$$k_1'(s_0) = 0. \qquad (51)$$

Величину s_0 найдем из условия необходимости перегрузки всей загрузки до облучения $s = S_r$, т. е.

$$\int_{s_0}^{S_r} \frac{ds}{S_1(s)} = 1. \qquad (52)$$

Условие (50) определяет $\gamma = 1 + (\alpha - \delta)s_0 + (\beta - \varepsilon)s_0^2$, а из (51) следует

$$\frac{\alpha + 2\beta s_0}{s_0(\alpha + \beta s_0)} = \frac{2}{s_0} = \frac{1}{s_0}\left\{\frac{2}{3}(1 - \bar{\varepsilon}) + \left[1 - \frac{2}{3}(1 - \bar{\varepsilon})\right]\left(\frac{S_r}{s_0}\right)^3\right\},$$

так что

$$\frac{2}{3}(1 - \bar{\varepsilon}) = \frac{2 - \left(\frac{S_r}{s_0}\right)^3}{1 - \left(\frac{S_r}{s_0}\right)^3}. \qquad (53)$$

Подставляя это выражение в (52), для s_0 получим

$$\ln x = \frac{2(1 - x)}{2 - x},$$

где $x = \frac{S_r^3}{s_0^3}$. Корень этого уравнения равен

$$x = \frac{S_r^3}{s_0^3} = 9{,}6, \text{ т. е. } S_r = 2{,}12\, s_0; \; s_0 = 0{,}47\, S_r. \qquad (54)$$

Подставляя значение корня в (53), найдем $\varepsilon = -0{,}32\beta$. Из условия (51) следует $\delta = -2\varepsilon s_0$, так что коэффициент размножения в промежутке (s_0, S_r) определяется формулой

$$k_1(s) = 1 + \alpha s_0 + \beta s_0^2 - 0{,}32\,\beta(s - s_0)^2. \qquad (55)$$

При этом экономия запаса реактивности

$$\frac{k(s_0) - k_r(S_r)}{k(0) - k_r(S_r)} = 0{,}33$$

и минимальный период перегрузки, осуществляемый вначале, $S_1(s_0) = 0{,}24 S_r$. Изменение коэффициента размножения показано на рис. 5.

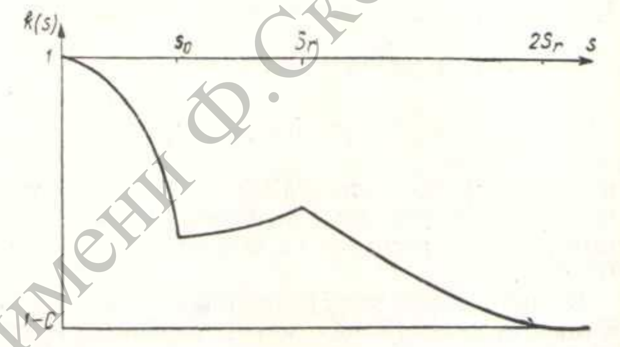

Рис. 5. Изменение коэффициента размножения при переходе с зависимостью реактивности второй степени.

Таким образом, этот режим перегрузки характеризуется тем, что равновесную перегрузку можно начать со второй перегрузки, и тогда коэффициент размножения принимает равновесное значение в конце ее. При первой перегрузке экономия составляет не менее 33% запаса реактивности, и во время второй перегрузки коэффициент размножения падает до своего равновесного значения (но не ниже запаса реактивности.) Облучение твэлов не превышает равновесного, и среднее выгорание первых двух загрузок составляет $1{,}5S_r$. Самая большая скорость перегрузки наблюдается в ее начале, и она примерно в четыре раза больше равновесной.

Автор выражает благодарность Б. Л. Иоффе за дискуссию по поводу этой работы.

Поступила в Редакцию 5/VI 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Иоффе, Л. В. Окунь. «Атомная энергия», № 1, 80 (1956).
2. S. Lewis, C. Lowthian. Доклад № 311, представленный Великобританией на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958).