

Спектр γ -излучения и парциальные величины поглощенной энергии в произвольной однородной смеси

В. А. Эльтеков, Б. М. Терентьев, М. В. Панчвидзе

Дано некоторое обобщенное рассмотрение приближенных методов перехода от точного интегрального уравнения для спектральной плотности γ -квантов к дифференциальному уравнению первого порядка. Показано, что коэффициентами последнего могут быть разнообразные функции из некоторого класса. В качестве частного случая получено приближение, рассмотренное в работах [1—3]. Проведено сравнение некоторых приближенных решений с известными решениями интегрального уравнения [5]. Приводятся результаты приближенного вычисления распределения поглощенной энергии γ -излучения между элементами смеси для одного частного случая, которые сравниваются с соответствующими точными решениями, взятыми из работы [4].

Спектр γ -излучения в однородной среде с равномерно распределенными источниками излучения может быть рассчитан методом возрастного приближения [1—3]. Преимущество этого метода в отличие от различных численных методов, дающих более точное решение, заключается в том, что для любого вещества или любой смеси веществ и для произвольного спектра источников он позволяет получить решение в виде квадратур.

Обычно возрастное уравнение для γ -квантов получается [1, 2] при использовании формальной аналогии между описаниями процессов замедления нейтронов и деградации мягких γ -квантов, которая особенно заметна, если спектральную плотность нейтронов рассматривать как функцию летаргии, а плотность γ -квантов — как функцию от безразмерной длины волны λ ($\lambda = mc^2/E$, где E — энергия кванта; mc^2 — энергия покоя электрона). Одно из достаточных условий применимости возрастного приближения, имеющее вид $\lambda \gg 1$ (оно равносильно условию $E \ll 0,511$ Мэв), исключает из рассмотрения ряд случаев, представляющих практический интерес, и поэтому возрастное приближение для γ -квантов не нашло такого широкого применения, как для

нейтронов. Однако в работах [3, 4] показано, что при решении задач о нахождении распределения поглощенной энергии γ -излучения между компонентами некоторой бесконечной квазигомогенной смеси путем формального распространения метода возрастного приближения на случай жестких квантов ($\lambda < 1$) получаются результаты, весьма близкие к точным.

Наряду с другими способами можно предложить следующий способ получения возрастного уравнения из точного интегрального уравнения для спектральной плотности γ -квантов $\varphi(\lambda)$, численное решение которого для некоторых случаев дано, например, в работе [5]. Введем в рассмотрение кроме $\varphi(\lambda)$ еще одну функцию: плотность деградации квантов $q(\lambda)$ — число квантов, испытывающих комптоновские столкновения такого типа, что длины их волн λ' и λ'' соответственно до и после рассеяния удовлетворяют условиям $\lambda' < \lambda$ и $\lambda'' \geq \lambda$. Система уравнений для φ и q в случае моноэнергетического единичного источника, испускающего кванты с энергией mc^2/λ_0 , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} q(\lambda) &= \int_{\lambda}^{\Lambda} d\lambda' \varphi(\lambda') \int_{\lambda}^{\lambda'+2} K(\lambda', \lambda'') d\lambda''; \\ \frac{dq}{d\lambda} &= -\tau(\lambda) \varphi(\lambda) + \sigma(\lambda_0) \delta(\lambda - \lambda_0), \end{aligned} \right\} (1)$$

где $\Lambda = \max(\lambda_0, \lambda - 2)$; $K(\lambda', \lambda'') d\lambda''$ — вероятность того, что квант с длиной волны λ' испытывает такое комптоновское рассеяние, что длина его волны после рассеяния будет лежать между λ'' и $\lambda'' + d\lambda''$; $\tau(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ — вероятности поглощения и рассеяния кванта соответственно $[\sigma(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+2} K(\lambda, \lambda') d\lambda']$. Ин-

тегральное уравнение для $\varphi(\lambda)$, решаемое в работе [5], получается из системы (1) путем исключения $q(\lambda)$ и введения функции $\Phi(\lambda) = \varphi(\lambda) + \frac{\sigma(\lambda)}{\mu(\lambda)} \delta(\lambda - \lambda_0)$.

Пусть разница между верхней и нижней границами функции $\varphi(\lambda')$ на отрезке $[\Lambda, \lambda]$ значительно меньше любого значения $\varphi(\lambda')$ на этом же отрезке, что условно можно выразить так:

$$\text{var } \varphi(\lambda') \ll \varphi(\lambda') \text{ при } \lambda' \in [\Lambda, \lambda]. \quad (2)$$

Тогда приближенно будет выполняться равенство

$$q(\lambda) = \kappa(\lambda_0, \lambda) \varphi(\lambda), \quad (3)$$

где
$$\kappa(\lambda_0, \lambda) = \int_{\Lambda}^{\lambda} d\lambda' \int_{\lambda}^{\lambda'+2} K(\lambda', \lambda'') d\lambda''.$$

Путем совместного решения уравнения (3) и второго уравнения из системы (1) можно получить выражения для q и φ при $\lambda > \lambda_0$

$$q(\lambda) = \sigma(\lambda_0) \exp\left(-\int_{\lambda_0}^{\lambda} \tau \kappa^{-1} d\lambda'\right);$$

$$\varphi(\lambda) = \kappa^{-1} q(\lambda). \quad (4)$$

Если предположить, что $\lambda \gg 1$, то величину κ удастся свести к некоторым табулированным функциям. При этом условии $K(\lambda', \lambda'')$ является функцией от разности своих аргументов:

$$K(\lambda', \lambda'') = k(\lambda'' - \lambda').$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \kappa &= \int_{\Lambda}^{\lambda} d\lambda' \int_{\lambda}^{\lambda'+2} k(\lambda'' - \lambda') d\lambda'' = \\ &= \int_{\Lambda}^{\lambda} d\lambda' \int_{\lambda - \lambda'}^2 k(z) dz = \int_0^2 k(z) dz \int_{\lambda - z}^{\lambda} d\lambda' = \\ &= \int_0^2 z k(z) dz = \int_{\lambda}^{\lambda+2} (\lambda' - \lambda) K(\lambda, \lambda') d\lambda' = \\ &= \sigma(\lambda) \xi(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь $\xi(\lambda)$ — среднее изменение длины волны кванта, обладающего энергией mc^2/λ , за одно столкновение:

$$\xi(\lambda) = \left[\int_{\lambda}^{\lambda+2} (\lambda' - \lambda) K(\lambda, \lambda') d\lambda' \right] \left[\int_{\lambda}^{\lambda+2} K(\lambda, \lambda') d\lambda' \right]^{-1} = \overline{(\lambda' - \lambda)}.$$

В пределах изменения λ от 0,1 до 10 величина $\xi(\lambda)$ достаточно точно определяется эмпирической формулой $\xi = 0,1 \ln(1200\lambda)$. При $\lambda > 10$ величина ξ близка к единице.

Условие (2) можно обобщить следующим образом. Пусть имеют место неравенства $\text{var } a(\lambda') \varphi(\lambda') \ll a(\lambda') \varphi(\lambda')$ и $\lambda \gg 1$ ($\lambda' \in [\Lambda, \lambda]$),

где $a(\lambda)$ — некоторая заданная функция*. Тогда можно получить уравнение такого же вида, как и (3), в котором

$$\kappa = a(\lambda) \int_{\lambda}^{\lambda+2} [a(\lambda')]^{-1} (\lambda' - \lambda) K(\lambda, \lambda') d\lambda'.$$

Если $a(\lambda) = \lambda$, то $\kappa = \sigma_a(\lambda) \lambda$, где $\sigma_a(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) K(\lambda, \lambda') d\lambda'$; если же $a(\lambda) = \lambda^{-1}$, то $\kappa = \int_{\lambda}^{\lambda+2} \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda} - \lambda'\right) K(\lambda, \lambda') d\lambda' = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{(\lambda^2 - \lambda\lambda')}{\lambda}$.

Решение $\varphi(\lambda)$, даваемое формулой (4), автоматически удовлетворяет уравнению баланса числа вторичных квантов

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \tau \varphi d\lambda = \sigma(\lambda_0),$$

и это свойство не зависит от конкретного вида функции $\kappa(\lambda)$. Однако уравнению баланса энергии квантов это решение, вообще говоря, может не удовлетворять. Свойство решения (4) — удовлетворять уравнению баланса числа квантов и не удовлетворять уравнению баланса энергии —

* Условие (2) можно было бы еще больше обобщить. Пусть $\hat{a}(\lambda)$ — некоторый оператор, зависящий от параметра λ . Тогда при условиях $\text{var } \hat{a}(\lambda') \varphi(\lambda') \ll \hat{a}(\lambda') \varphi(\lambda')$ и $\lambda \gg 1$ ($\lambda' \in [\Lambda, \lambda]$) получилось бы уравнение вида (3), в котором $\hat{\kappa}(\lambda)$, будучи оператором, имело бы вид $\hat{\kappa}(\lambda) = \hat{c}(\lambda) \hat{a}(\lambda)$, где $\hat{c}(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+2} d\lambda' \times (\lambda' - \lambda) K(\lambda, \lambda') \hat{a}^{-1}(\lambda')$. Однако это обобщение удобно для использования только в том случае, когда $\hat{\kappa}(\lambda)$ является функцией, а не оператором.

должно сохраняться также и при расчете поглощения излучения в элементах смеси (см. ниже). Поэтому полученный в работе [3] баланс энергии при применении данного решения, в котором и принималось равным $\sigma_s \xi$, для нахождения распределения поглощенной энергии в смеси индий-галлиевого сплава и воды являлся одним из доводов в пользу применимости данного метода. Более поздние расчеты [4], проведенные методом Монте-Карло, показали что не только баланс энергии, но и доли поглощенных в элементах смеси энергий, полученные с помощью данного решения, в случае данной смеси веществ получаются достаточно правильными. Однако дальнейшие исследования этого типа возрастного приближения выявили случаи, когда баланс энергии не удовлетворяется, причем разница составляет $\sim 20\%$.

Поэтому при развитии методов возрастного приближения возникает задача получения такого приближенного решения, для которого баланс энергии выполнялся бы автоматически. К этой цели приводит рассмотрение системы уравнений для двух функций: $\varepsilon(\lambda)$ — спектральной плотности энергии ($\varepsilon = \lambda^{-1}\varphi$) и $p(\lambda)$ — величины суммарной энергии квантов, испытывающих такие рассеяния, при которых $\lambda' < \lambda$, $\lambda'' > \lambda$, причем энергией кванта считается его энергия после рассеяния. Отметим, что $p \neq \lambda^{-1}q$. Эта система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\lambda} &= -\gamma\varepsilon + \sigma_s(\lambda_0)\lambda_0^{-1}\delta(\lambda - \lambda_0); \\ p(\lambda) &= \int_{\lambda}^{\lambda} d\lambda' \varepsilon(\lambda') \int_{\lambda}^{\lambda'+2} K_s(\lambda', \lambda'') d\lambda''. \end{aligned} \right\} (5)$$

Здесь $\gamma = \tau + \sigma_a$; $\sigma_s = \sigma - \sigma_a$; $K_s(\lambda', \lambda'') = K(\lambda', \lambda'')\lambda'/\lambda''$.

Пусть $\text{var } b(\lambda')\varepsilon(\lambda') \ll b(\lambda')\varepsilon(\lambda')$ при $\lambda \in [\lambda_0, \lambda]$, где $b(\lambda)$ — некоторая заданная функция. Тогда имеет место равенство

$$p = \chi\varepsilon,$$

где

$$\chi(\lambda_0, \lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda} d\lambda' b(\lambda') [b(\lambda')]^{-1} \times \int_{\lambda}^{\lambda'+2} K_s(\lambda', \lambda'') d\lambda''. \quad (6)$$

Из совместного решения первого уравнения из системы (5) и уравнения (6) при $\lambda > \lambda_0$

получим

$$p(\lambda) = \sigma_s(\lambda_0)\lambda_0^{-1} \exp \times \left(- \int_{\lambda_0}^{\lambda} \gamma\chi^{-1} d\lambda' \right); \quad \varepsilon = \chi^{-1}p. \quad (7)$$

Имеет место равенство

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\varepsilon d\lambda = \sigma_s(\lambda_0)\lambda_0^{-1}, \quad (8)$$

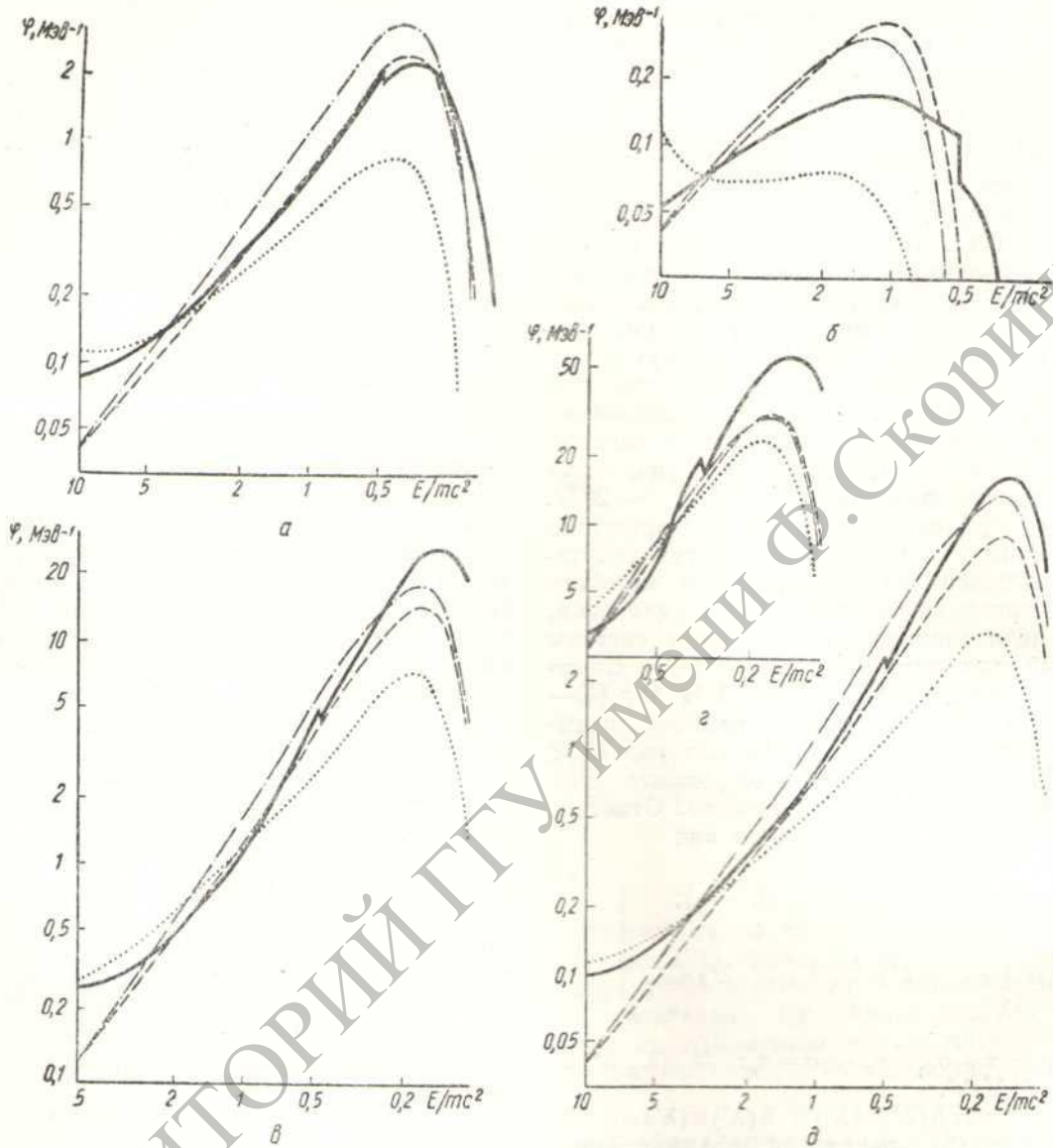
не зависящее от конкретного вида функции χ и выражающее баланс энергии вторичных квантов.

Нами проведены вычисления функции φ по формуле (4) при $\kappa = \sigma_s \xi$ и функции $\varepsilon\lambda = \varphi$, где ε вычислялась по формуле (7) при $\chi = \sigma_a\lambda$ и $\chi = \sigma_s \xi$. Отметим, что во всех этих случаях не выполняется условие $\lambda \gg 1$. Поэтому экстраполяция указанных выражений для κ и χ на данный случай требует обоснования. Тем не менее интересно провести сравнение (см. рисунок) вычисленной с помощью формул (4) и (7) функции φ с численным решением точного уравнения, взятым из работы [5]. Ввиду того что ни одна из кривых, рассчитанных по методу возрастного приближения, не совпадает с достаточной точностью с соответствующей кривой из работы [5], следует ввести численную меру пригодности каждой кривой. На наш взгляд в качестве такой меры лучше всего будет служить величина среднеквадратичного отклонения D плотности поглощенной энергии f ($f = \gamma\lambda^{-1}\varphi$), вычисленной на основании одной из формул (4) или (7), от плотности поглощенной энергии f_{KL} , найденной с помощью соответствующей кривой из работы [5]. Величина D определяется выражением

$$D = \left[\int_{\lambda_0}^{\infty} (f - f_{KL})^2 d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} f_{KL} d\lambda \right)^{-1}.$$

В табл. 1 приведены значения D для случаев, представленных на рисунке. Из приведенных данных видно, что для каждого из трех вариантов аппроксимации наилучшее совпадение получается для легких элементов и при $\kappa = \sigma_s \xi$ и $\chi = \sigma_s \xi$.

Для практических приложений (в частности, при проектировании радиационно-химических установок) иногда важнее знать не спектр γ -квантов в системе, а распределение поглощенной энергии γ -излучения между компонентами системы.



Спектральная плотность γ -квантов $\varphi(E)$ в меди (а), свинце (б) и алюминии (в, г, д).
 — численное решение интегрального уравнения (5); решения дифференциальных уравнений (4) и (7), у которых коэффициенты функций κ и χ имеют вид: $\kappa = \sigma_s \xi$ (— — —); $\chi = \sigma_s \xi$ (— · —); $\chi = \sigma_a \lambda$ (.....).

Таблица 1
 Значения D для трех вариантов аппроксимации

Элемент	E_0	$\kappa = \sigma_s \xi$	$\chi = \sigma_a \lambda$	$\chi = \sigma_s \xi$
Свинец . . .	$10 mc^2$	0,50	0,74	0,54
Медь	$10 mc^2$	0,25	0,35	0,35
Алюминий	$10 mc^2$	0,25	0,44	0,21

Подобного рода бесконечная однородная система с равномерно распределенными источниками может рассматриваться как расчетная модель для некоторых частных случаев радиационно-химических аппаратов, общие размеры которых настолько велики, что можно пренебречь влиянием краев, а толщина источников и расстояние между ними настолько малы, что систему можно рассматривать как квазигомогенную смесь источников и облучаемых

компонент. Результаты решения задачи нахождения распределения поглощенной энергии между компонентами смеси позволили бы рассчитать ряд важнейших технологических характеристик аппаратов (энергетические коэффициенты полезного действия, производительность и др. [6, 7]), для которых выполняются указанные условия.

Данная расчетная модель будет достаточно точно воспроизводить реальную систему, если наряду с указанными выше условиями выполняется еще условие супергетерогенности по отношению к вторичным электронам, получающим большую энергию за счет взаимодействия с γ -квантами. Это значит, что система должна быть такой, чтобы пробегами этих вторичных электронов по сравнению с размерами любых деталей системы можно было пренебречь. Если последнее требование не выполняется, то необходимо учитывать диффузию вторичных электронов с передачей энергии среде.

Для N -компонентной смеси указанные доли η_i поглощенной в i -й компоненте смеси энергии будут определяться формулой

$$\eta_i = [\mu(\lambda_0)]^{-1} v_i \left\{ \gamma_i(\lambda_0) + \lambda_0 \int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma_i(\lambda) \varepsilon(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (9)$$

где v_i — объемная доля i -й компоненты; $\mu = \tau + \sigma$.

С помощью соотношений (8) и $\gamma = \sum_{i=1}^N v_i \gamma_i$ нетрудно убедиться, что имеет место равенство $\sum_{i=1}^N \eta_i = 1$.

В работе [3] величина доли поглощенной энергии η_i выражалась через плотность квантов $\Phi = \lambda \varepsilon$. Если при этом используется функция Φ , определяемая формулой (4), то соотношение $\sum_{i=1}^N \eta_i = 1$, вообще говоря, выполняться не должно.

В табл. 2 приведены результаты вычисления по формуле (9) распределения поглощенной энергии между источниками излучения (состав сплава: 22 об.% индия и 78 об.% галлия) и облучаемым телом (водно-эквивалентная жидкость, составляющая 95 об.%) для индий-галлиевого радиационного контура [8]. Там же даны точные значения, рассчитанные методом Монте-Карло [4].

Таблица 2
Результаты вычисления различными методами распределения поглощенной энергии

Метод	$E_0=1,085 \text{ Мэв}$		$E_0=0,406 \text{ Мэв}$	
	$\eta_{\text{In-Ga}}$	$\eta_{\text{H}_2\text{O}}$	$\eta_{\text{In-Ga}}$	$\eta_{\text{H}_2\text{O}}$
Монте-Карло	0,32	0,68	0,46	0,54
Формула (4)				
при $\chi = \sigma_s \xi$	0,31	0,67	0,44	0,54
Формула (7)				
при $\chi = \sigma_s \lambda$	0,30	0,70	0,47	0,53
$\chi = \sigma_s \xi$	0,31	0,69	0,46	0,54

Как видно из таблицы, распределение поглощенных энергий достаточно хорошо описывается формулой (9) при подстановке в нее решений рассмотренных дифференциальных уравнений, несмотря на то, что $\lambda < 1$. В то же время наблюдаются значительные отклонения отдельных значений спектральной плотности квантов от точных величин (см. рисунок). Повидимому, все эти отклонения, имея различные знаки, при интегрировании скомпенсировали друг друга и не дали почти никакого вклада в окончательный результат.

Возможно, что при более удачном выборе функций χ или κ отклонения отдельных приближенных значений спектральной плотности от точных могут быть намного меньше, чем в рассмотренных нами случаях.

Авторы выражают благодарность А. Х. Брегеру за интерес и внимание к работе.

Поступила в Редакцию 20/VI 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. И. Лейпунский, Б. В. Новожилов, В. Н. Сахаров. Распространение гамма-квантов в веществе. М., Физматгиз, 1960.
2. Б. В. Новожилов. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 33, 1287 (1957).
3. Б. М. Терентьев, Ю. С. Рябухин. «Ж. техн. физ.», 31, 837 (1961).
4. Б. М. Терентьев, В. А. Эльтеков, Ю. С. Рябухин. «Атомная энергия», 13, 568 (1962).
5. P. K a r r, J. L a m k i n. Phys. Rev., 76, 1843 (1949).
6. Н. П. Сыркис, А. Х. Брегер, Б. И. Вайштейн. Large Radiation Sources in Industry. Vienna, IAEA, 1960, p. 15.
7. M. L e v i n e, M. S t e i n b e r g. Nucl. Sci. and Engng, 12, 498 (1962).
8. А. Х. Брегер и др. См. [6], стр. 50.