Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

В. С. ПИЛИДИ, Л. И. САЗОНОВ

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 I 1974)

В настоящей работе указывается алгоритм для построения регуляризатора характеристического бисингулярного интегрального оператора. С помощью регуляризации получены априорные оценки для решений бисингулярных интегральных уравнений.

1°. Приведем сначала некоторые вспомогательные определения. Пусть Γ_1 и Γ_2 — простые замкнутые контуры типа Ляпунова. Измеримому множеству F $(\subset\Gamma_1)$ поставим в соответствие оператор P_F в $L_p(\Gamma_1)$ (здесь и всюду далее $1<p<\infty$) умножения на характеристическую функцию множества F. Линейный ограниченный оператор A в $L_p(\Gamma_1)$ называется оператором локального типа ([1]), если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1, $F_2(\subset\Gamma_1)$ оператор $P_{F_1}AP_{F_2}$ является компактным. Множество операторов локального типа в $L_p(\Gamma_1)$ образует банахову алгебру, которую мы обозначим через $\Lambda_p(\Gamma_1)$. Множество всех компактных операторов в $L_p(\Gamma_1)$ обозначим через $K_p(\Gamma_1)$.

Знаком $\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ мы будем обозначать замыкание алгебраического тензорного произведения $\Lambda_p(\Gamma_1)\otimes\Lambda_p(\Gamma_2)$ по норме пространства линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Аналогично, замыкая множества $K_p(\Gamma_1)\otimes\Lambda_p(\Gamma_2)$ и $\Lambda_p(\Gamma_1)\otimes K_p(\Gamma_2)$, мы получим множества, обозначаемые соответственно $K_p^1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ и $K_p^2(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Эти множества являются замкнутыми двусторонними идеалами в банаховой алгебре $\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

Определение 1. Оператор A $(\in\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2))$ назовем частично нётеровым по первой переменной, если его класс эквивалентности $\hat{A}$ обратим в фактор-алгебре $\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2)/K_p^1(\Gamma_1, \Gamma_2)$. В этом случае представитель класса $(\hat{A})^{-1}$ называется частичным регуляризатором оператора A.

Аналогично вводится частичная нётеровость по второй переменной.

Если оператор A $(\in\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2))$ является частично нётеровым по обеим переменным и R_1, R_2 — соответствующие частичные регуляризаторы, то оператор A является оператором Нётера и его регуляризатор вычисляется по формуле

$$R=-R_1AR_2+R_1+R_2. \tag{1}$$

Определение 2. Операторы A, B $(\in\Lambda_p(\Gamma_1, \Gamma_2))$ локально эквивалентны в точке t_1 $(\in\Gamma_1)$, если

$$\lim \|(A-B)(P_u\otimes I)\|=0,$$

где предел берется по направленному множеству окрестностей точки t_1. Сокращенно мы будем отмечать этот факт так: $A\overset{1,t_1}{\sim}B$. Аналогично вводится локальная эквивалентность в точках контура $\Gamma_2 (A\overset{2,t_2}{\sim}B)$.

Через S_1 (S_2) мы будем обозначать сингулярный интегральный оператор в $L_p(\Gamma_1)$ $(L_p(\Gamma_2))$:

$$(S_1\varphi)(t_1)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1.$$

Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ характеристический бисингулярный интегральный оператор

$$(A\varphi)(t_1, t_2) = a_0(t_1, t_2)\varphi(t_1, t_2) + \frac{a_1(t_1, t_2)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1}d\tau_1 + \\ + \frac{a_2(t_1, t_2)}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(t_1, t_2)}{\tau_2 - t_2}d\tau_2 + \frac{a_{12}(t_1, t_2)}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}d\tau_1 d\tau_2. \tag{2}$$

Относительно функций a_0, a_1, a_2, a_{12} будем предполагать, что они удовлетворяют условию Гёльдера по совокупности переменных.

Оператор (2) удовлетворяет при каждом $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$ следующим отношениям локальной эквивалентности:

$$A \overset{1, t_1}{\sim} I \otimes B_{1, t_1} + S_1 \otimes C_{1, t_1}, \\ A \overset{2}{\sim}_{t_2} B_{2, t_2} \otimes I + C_{2, t_2} \otimes S_2, \tag{3}$$

где, например;

$$(B_{1, t_1}\varphi)(t_2) = a_0(t_1, t_2)\varphi(t_2) + a_2(t_1, t_2)(S_2\varphi)(t_2), \\ (C_{1, t_1}\varphi)(t_2) = a_1(t_1, t_2)\varphi(t_2) + a_{12}(t_1, t_2)(S_2\varphi)(t_2).$$

Известно, что необходимым и достаточным условием нётеровости оператора (2) является обратимость операторов $B_{1, t_1} \pm C_{1, t_1}$ и $B_{2, t_2} \pm C_{2, t_2}$ для всех t_1 $(\in \Gamma_1)$ и t_2 $(\in \Gamma_2)$. Эти условия равносильны обратимости операторов, стоящих в правой части соотношений (3) для всех t_1, t_2.

Можно показать, что оператор R_1, удовлетворяющий для каждого t_1 $(\in \Gamma_1)$ соотношению

$$R_1 \overset{1, t_1}{\sim} (I \otimes B_{1, t_1} + S_1 \otimes C_{1, t_1})^{-1},$$

является частичным регуляризатором оператора A по первой переменной. Легко видеть, что

$$(I \otimes B_{1, t_1} + S_1 \otimes C_{1, t_1})^{-1} = I \otimes \{{}^1/_2[(B_{1, t_1} + C_{1, t_1})^{-1} + \\ + (B_{1, t_1} - C_{1, t_1})^{-1}]\} + S_1 \otimes \{{}^1/_2[(B_{1, t_1} + C_{1, t_1}]^{-1} - \\ - (B_{1, t_1} - C_{1, t_1})^{-1}]\}.$$

В силу известных фактов теории сингулярных интегральных операторов ([5], [6]), имеет место следующее представление:

$$({}^1/_2[(B_{1, t_1} + C_{1, t_1})^{-1} \pm (B_{1, t_1} - C_{1, t_1})^{-1}]\varphi)(t_2) = \\ = a^{\pm}(t_1, t_2)\varphi(t_2) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{b^{\pm}(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2}\varphi(\tau_2)d\tau_2,$$

где функции $a^{\pm}$, $b^{\pm}$ удовлетворяют условию Гёльдера по совокупности переменных. Тогда оператор R_1 может быть построен по формуле

$$(R_1\varphi)(t_1, t_2) = a^{+}(t_1, t_2)\varphi(t_1, t_2) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{b^{+}(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2}\varphi(t_1, \tau_2)d\tau_2 + \\ + \frac{a^{-}(t_1, t_2)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1}d\tau_1 + \frac{1}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{b^{-}(t_1, t_2, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}\varphi(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

Аналогично строится частичный регуляризатор по второй переменной, и по формуле (1) вычисляется обычный регуляризатор.

2°. Через $C_{mn}{}^{\lambda}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ обозначим класс функций на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, обладающих непрерывной производной $\partial^{m+n}f(t_1, t_2)/\partial t_1{}^m \partial t_2{}^n$, удовлетворяющей по t_1 и t_2

условию Гёльдера с показателем λ. Относительно нормы

$$\|f\|_{mn}^{\lambda}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\max_{t_i\in\Gamma_i}\left|\frac{\partial^{k+s}f(t_1,t_2)}{\partial t_1^k\,\partial t_2^s}\right|+\sup_{\substack{t_i,\,\tau_i\in\Gamma_i\\ |\tau_1-t_1|+|\tau_2-t_2|\neq 0}}\left[|\tau_1-t_1|^2+\right.$$

$$\left.+|\tau_2-t_2|^2\right]^{-\lambda/2}\left(\frac{\partial^{m+n}f(t_1,t_2)}{\partial t_1^m\,\partial t_2^n}-\frac{\partial^{m+n}f(\tau_1,\tau_2)}{\partial t_1^m\,\partial t_2^n}\right)\Bigg]$$

$C_{mn}^{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ является банаховым пространством.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — гладкие контуры класса C_{m+2} и C_{n+2} соответственно, а коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_{12} оператора A вида (2), удовлетворяющего теории Нётера, принадлежат $C_{mn}^{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Вычисляя регуляризатор оператора A с помощью указанного в п. 1^0 алгоритма, можно получить следующий результат.

Л е м м а. *Оператор RA имеет вид*

$$(RA\varphi)(t_1,t_2)=\varphi(t_1,t_2)+\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{k(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

где $k(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)\in C_{mnmn}^{\lambda'}(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\Gamma_1\times\Gamma_2)$ *при любом* λ', $0<\lambda'<\lambda$ *и* $k(t_1,t_2,t_1,\tau_2)\equiv 0$, $k(t_1,t_2,\tau_1,t_2)\equiv 0$.

Предполагая, что оператор A вида (2) является оператором Нётера, и используя эту лемму, можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть коэффициенты оператора A удовлетворяют условию Гёльдера, $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $Af\in L_q(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $1<p<q<\infty$. Тогда $f\in L_q(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и существует не зависящая от f константа c такая, что выполняется оценка*

$$\|f\|_{L_q}\leqslant c(\|Af\|_{L_q}+\|f\|_{L_p}).$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 — гладкие контуры класса C_{m+2} и C_{n+2} соответственно, коэффициенты оператора A принадлежат классу $C_{mn}^{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $0<\lambda'<\lambda$.

Т е о р е м а 2. *Если $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $Af\in C_{mn}^{\lambda}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, то $g\in C_{mn}^{\lambda'}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и существует такая константа c, что*

$$\|f\|_{mn}^{\lambda'}\leqslant c(\|Af\|_{mn}^{\lambda}+\|f\|_{L_p}).$$

Сформулируем еще один результат.

Т е о р е м а 3. *Пусть Γ_1 и Γ_2 — контуры класса C_∞, $f\in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ — решение бисингулярного уравнения $Af=g$, где A — характеристический бисингулярный оператор, являющийся оператором Нётера. Если функция g и коэффициенты оператора A бесконечно дифференцируемы (голоморфны) на $\Gamma_1\times\Gamma_2$, то f также бесконечно дифференцируема (голоморфна) на $\Gamma_1\times\Gamma_2$.*

Авторы выражают признательность И. Б. Симоненко за постоянное внимание к работе.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
17 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Б. Симоненко,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, 567 (1965). [2] *И. Б. Симоненко,* Функц. анализ и его прилож., т. 5, 1, 93 (1971). [3] *В. С. Пилиди,* ДАН, т. 201, № 4, 787 (1971). [4] *В. С. Пилиди,* Матем. исслед., т. 7, в. 3, 167 (1972). [5] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [6] *Ф. Д. Гахов,* Краевые задачи, М., 1963.