Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 1

УДК 517.55 *МАТЕМАТИКА*

И. И. БАВРИН, Г. Н. БАКУНИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕМЛЯКОВА С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ДВУМЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ C^2

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 I 1974)

В теории интегральных представлений функций многих комплексных переменных интегральные представления Темлякова заняли важное место благодаря ряду замечательных свойств, которые существенно отличают их от остальных интегральных представлений и в то же время тесно связывают с формулой Коши одного комплексного переменного.

Известно ([1-4]), что в случае двух комплексных переменных в интегральных представлениях Темлякова многообразие, на котором должна быть известна функция $f=f(z_1, z_2)$ или оператор $L_{1,1}^{(1)}[f]\equiv L_1[f]=f+z_1f_1'+ +z_2f_2'$, $f_\nu'=f_{z_\nu}'$ $\nu=1, 2$, или f_1' и f_2', есть, вообще говоря, либо вся граница той области, в которой f голоморфна, либо трехмерная часть этой границы. В настоящей статье показано, что существует новый класс интегральных представлений Темлякова — интегральные представления Темлякова с определяющим двумерным многообразием, в которых роль указанного трехмерного многообразия играет двумерное многообразие. При этом двумерное многообразие может принадлежать либо границе той области, в которой f голоморфна, либо самой этой области.

Пусть D — ограниченная, выпуклая, полная двоякокруговая область с центром в начале координат, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне. А. А. Темляковым установлено ([5], [6]), что граница этой области допускает параметризацию вида

$$|z_1|=r_1(\tau), \quad |z_2|=r_2(\tau), \quad 0\leqslant\tau\leqslant1, \tag{1}$$

где $r_1(\tau)$ — непрерывная на сегменте $0\leqslant\tau\leqslant1$ функция и

$$r_1(0)=0, \quad r_1(1)<+\infty, \quad 0<r_1'(\tau)\leqslant\tau^{-1}r_1(\tau), \quad 0<\tau\leqslant1,$$

$$r_2(\tau)=\tilde{R}_2\exp\left[-\int_0^\tau\frac{\tau}{1-\tau}d\ln r_1(\tau)\right]$$

($\tilde{R}_2$ — положительное число), $r_2(1)=0$. При этом кривая (1) в «абсолютной четверть-плоскости» есть огибающая семейства прямых

$$\tau\frac{|z_1|}{r_1(\tau)}+(1-\tau)\frac{|z_2|}{r_2(\tau)}=1, \quad 0<\tau<1,$$

и расположена под огибаемой.

Определение. Двумерное многообразие $\{z_1, z_2$: $|z_1|=R_1$, $|z_2|=R_2$; $R_1, R_2>0\}$, принадлежащее области D или ее границе ∂D, назовем *определяющим двумерным многообразием* и обозначим через $E(R_1, R_2)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области D. Тогда, если функция $f(z_1, z_2)$ и все ее частные производные до порядка λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *, включительно непрерывны на $E(R_1, R_2)$, то для $k=0$; λ и точек $(z_1, z_2) \in D$*

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{16\pi^4 i} \int_0^{+\infty} d\tau_1 \int_0^{+\infty} d\tau_2 \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} dt_1 \int_0^{2\pi} \mu \, dt_2 \int_0^{2\pi} dt \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{1-k} F_k(R_1, R_2, \zeta, t)\, d\zeta}{(\zeta - \tilde{u})^{2-k}} \tag{2}$$

где

$$\mu = \mu(\tau_1, \tau_2, \tau, t_1, t_2, R_1, R_2) = \exp\left[\tau_1\left(\frac{r_1(\tau)}{R_1} e^{-it_1} - 1\right) + \tau_2\left(\frac{r_2(\tau)}{R_2} e^{-it_2} - 1\right)\right]$$

$$F_k(R_1, R_2, \zeta, t) = L_{2-k,1}^{(k)}[f(R_1\zeta, R_2\zeta e^{-it})],\ **$$

$$\tilde{u} = \frac{\tau}{r_1(\tau)} z_1 e^{it_1} + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)} z_2 e^{i(t_2+t)}$$

При доказательстве используются представимость функции f двойным степенным рядом, свойства двойных степенных рядов, устанавливаемая непосредственным подсчетом формула

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} d\tau_1 \int_0^{+\infty} d\tau_2 \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} dt_1 \int_0^{2\pi} \mu \, dt_2 \int_0^{2\pi} L_1[(R_1\tilde{u})^{m_1} (R_2 \tilde{u} e^{-it})^{m_2}]\, dt = z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

(m_1, m_2 — целые неотрицательные числа) и формула Коши одного комплексного переменного.

Отметим, что в формуле (2) выражение $\zeta^{1-k} F_k(R_1, R_2, \zeta, t)/(\zeta - \tilde{u})^{2-k}$ при $k=0$ принимает вид $\dfrac{\zeta}{(\zeta-\tilde{u})^2} f(R_1\zeta, R_2\zeta e^{-it})$, а при $k=1$ (если $\lambda=1$) — вид $L_1[f(R_1\zeta, R_2\zeta e^{-it})]/(\zeta - \tilde{u})$. Получаемые при этом из (2) формулы будем называть интегральными представлениями Темлякова соответственно II рода и I рода с определяющим двумерным многообразием. Эти формулы выражают значения функции f внутри области D через значения соответственно функции f и оператора $L_1[f]$ на $E(R_1, R_2)$.

Пусть $E(R_1^{(1)}, R_2^{(1)})$ и $E(R_1^{(2)}, R_2^{(2)})$ — два любых определяющих двумерных многообразия (в частности, они могут и совпадать). Имеет место и следующая

Теорема 2. *Если функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области D и функции $f_1'(z_1, z_2)$ и $f_2'(z_1, z_2)$ непрерывны соответственно на $E(R_1^{(1)}, R_2^{(1)})$ и $E(R_1^{(2)}, R_2^{(2)})$, то для точек $(z_1, z_2) \in D$*

$$f(z_1, z_2) = f(0,0) + \sum_{\nu=1}^{2} \frac{z_\nu}{16\pi^4 i} \int_0^{+\infty} d\tau_1 \int_0^{+\infty} d\tau_2 \int_0^1 d\tau \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} dt_1 \int_0^{2\pi} \mu_\nu \, dt_2 \int_0^{2\pi} dt \int_{|\zeta|=1} \frac{f_\nu'(R_1^{(\nu)}\zeta, R_2^{(\nu)} \zeta e^{-it})\, d\zeta}{\zeta - \tilde{u}}, \tag{3}$$

где

$$\mu_\nu = \mu(\tau_1, \tau_2, \tau, t_1, t_2, R_1^{(\nu)}, R_2^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2.$$

* Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

** Заметим, что $L_{2,1}^{(0)}[f] \equiv f$ (7).

В процессе доказательства используются свойства операторов L_{A_j} и $L_{A_j}^{(-1)}$ ([8]), формула (2) из ([7]) и формула (2) (при $k=1$) данной статьи.

Формулу (3) будем называть интегральным представлением Темлякова III рода с определяющими двумерными многообразиями. Эта формула выражает значения функции f внутри области D через значения f_1' и f_2' (с точностью до постоянного слагаемого $f(0, 0)$) соответственно на $E(R_1^{(1)}, R_2^{(1)})$ и $E(R_1^{(2)}, R_2^{(2)})$.

Замечание 1. Отметим, что в теореме 1 непрерывность функции f и всех ее частных производных до порядка λ на $E(R_1, R_2)$ существенна, когда $E(R_1, R_2)$ принадлежит границе ∂D области D, так как если $E(R_1, R_2)$ принадлежит области D, то непрерывность f и указанных производных на $E(R_1, R_2)$ следует из голоморфности f в D. Аналогичное замечание следует иметь в виду и в отношении f_1' и f_2' в теореме 2.

Замечание 2. Формулы (2) и (3) остаются справедливыми и в случае бицилиндра.

Замечание 3. Отметим, что в формулах (2), (3) можно $\tilde{u}$ заменить на

$$u = \frac{\tau}{r_1(\tau)} z_1 + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)} z_2 e^{it}.$$

Тогда в формуле (2) вместо $F_k(R_1, R_2, \zeta, t)$ будем иметь

$$F_k(R_1, R_2, \zeta, t_1, t_2, t) = L_{2-k,1}^{(k)}[f(R_1\zeta e^{it_1}, R_2\zeta e^{i(t_2-t)})],$$

а в формуле (3) вместо $(R_1^{(\nu)}\zeta, R_2^{(\nu)}\zeta e^{-it})$ удем иметь

$$(R_1^{(\nu)}\zeta e^{it_1}, R_2^{(\nu)}\zeta e^{i(t_2-t)}).$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
13 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Темляков*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 89 (1957). [2] *А. А. Темляков*, ДАН, т. 131, № 2 (1960). [3] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 180, № 1 (1968). [4] *Б. А. Фукс*, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [5] *А. А. Темляков*, ДАН, т. 120, № 5 (1958). [6] *А. А. Темляков*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 96, 3 (1960). [7] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 169, № 3 (1966). [8] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 181, № 2 (1968).