

В. Б. КОРОТКОВ

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 II 1974)

Обозначения. (X, Σ, μ) , (Y, \mathfrak{E}, ν) — пространства с конечными положительными мерами, $M(Y, \nu)$ — пространство всех ν -измеримых ν -почти всюду конечных функций, определенных на Y , с естественным отождествлением ν -эквивалентных функций, $M(X, \mu)$ — аналогичное пространство, P_α — оператор в M , определяемый равенством $P_\alpha f = \chi_\alpha f$, $f \in M$, χ_α — характеристическая функция множества Ω .

1. Определение ⁽¹⁾. Пусть \mathcal{L} — линейное многообразие в $M(X, \mu)$. Линейный оператор $T: \mathcal{L} \rightarrow M(Y, \nu)$ называется интегральным оператором, если существует определенное на $Y \times X$ ($\nu \times \mu$)-измеримое ядро $K(s, t)$ такое, что для всех $f \in \mathcal{L}$

$$Tf(s) = \int_x K(s, t) f(t) d\mu(t).$$

Определение. Линейный оператор $T: \mathcal{L} \rightarrow M(Y, \nu)$ назовем частично интегральным оператором, если $\mathcal{L} \supset L^\infty(X, \mu)$ и сужение оператора T на $L^\infty(X, \mu)$ является интегральным оператором.

Не каждый частично интегральный оператор является интегральным оператором, как показывает следующий

Пример 1. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$, меры которых положительны и удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{mE_n} < \infty,$$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0, 1)$. Рассмотрим оператор $A: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$,

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{mE_n}} \right) \varphi_n, \quad f \in L_2(0, 1).$$

A — линейный ограниченный оператор, являющийся частично интегральным, но не интегральным оператором. Более того, оператор A не унитарно эквивалентен никакому интегральному оператору в $L_2(0, 1)$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия частичной интегральности линейного оператора.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L} \supset L^\infty(X, \mu)$. Линейный оператор $T: \mathcal{L} \rightarrow M(Y, \nu)$ частично интегрален тогда и только тогда, когда оператор $t: L^\infty(X, \mu) \rightarrow M(Y, \nu)$ — сужение оператора T на $L^\infty(X, \mu)$ — является C^* -оператором*.

* Пусть Z — банахово пространство. Линейный оператор $B: Z \rightarrow M(Y, \nu)$ называется C^* -оператором ⁽²⁾, если существует ν -измеримая функция $\varphi: Y \rightarrow Z$ такая, что для всех $z^* \in Z^*$ $(Bz^*)(s) = z^* \varphi(s)$.

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 6 работы (2). Из теоремы 1 вытекает следующее предложение.

Теорема 2. Пусть $T: \mathcal{L} \rightarrow M(Y, \nu)$ — частично интегральный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется ν -измеримое множество $Y_\varepsilon \subset Y$ и регулярный интегральный вполне непрерывный оператор $Q_\varepsilon: L_1(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ такие, что $\nu(Y \setminus Y_\varepsilon) < \varepsilon$ и $Q_\varepsilon^* = P_Y T$, где Q_ε^* — сопряженный к Q_ε оператор.

Применяя теорему 2 к интегральному оператору Q_ε , получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $T: \mathcal{L} \rightarrow M(Y, \nu)$ — частично интегральный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся ν -измеримое множество $Y_\varepsilon \subset Y$, μ -измеримое множество $X_\varepsilon \subset X$ и регулярный интегральный вполне непрерывный оператор $T_\varepsilon: L_1(X, \mu) \rightarrow L_1(Y, \nu)$ такие, что $\nu(Y \setminus Y_\varepsilon) < \varepsilon$, $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ и для всех $f \in L^\infty(X, \mu)$

$$T_\varepsilon f = P_{Y_\varepsilon} T P_{X_\varepsilon} f.$$

Теорема 3 дополняет теорему 6 из (3). В теореме 3 нельзя положить $X_\varepsilon = X$; иллюстрацией может служить рассмотренный в примере 1 оператор A , обладающий следующим свойством: для любого измеримого множества $e \subset [0, 1]$, $me > 0$ и любого $\delta > 0$ оператор $P_e A$ не продолжается до линейного ограниченного оператора, действующего из $L_{2-\delta}(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$. В теореме 3 нельзя положить $Y_\varepsilon = Y$.

Теорема 3 позволяет получить условия полной непрерывности частично интегральных операторов, действующих в идеальных пространствах*.

Теорема 4. Пусть $E(X, \mu)$, $F(Y, \nu)$ — идеальные пространства, $T: E(X, \mu) \rightarrow F(Y, \nu)$ — линейный ограниченный частично интегральный оператор. Если

$$\lim_{\nu D \rightarrow 0} \|P_D T\|_{E \rightarrow F} = 0 \quad (1)$$

и

$$\lim_{\nu(Y \setminus \Omega) + \mu(X \setminus \Psi) \rightarrow 0} \|P_\Omega T P_\Psi - T\|_{E \rightarrow F} = 0,$$

то T — вполне непрерывный оператор.

Замечание. Если $E(X, \mu) = L_p(X, \mu)$, $F(Y, \nu) = L_p(Y, \nu)$, $1 < p < \infty$, то в теореме 4 условие (1) можно опустить.

2. Эта часть статьи посвящена спектральным свойствам частично интегральных и интегральных операторов.

Определение (5). Пусть T — линейный оператор в банаховом пространстве Z . Число λ называется точкой предельного спектра оператора T , если в области определения оператора T существует некомпактная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ такая, что

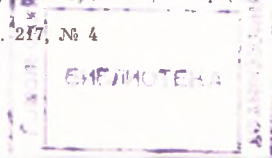
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda \cdot 1)x_n\|_Z = 0.$$

Дж Нейман (6) показал, что предельный спектр каждого самосопряженного интегрального карлемановского оператора, действующего в $L_2(a, b)$, содержит 0. В (7, 8) было показано, что если T — интегральный карлемановский оператор в $L_2(X, \mu)$, мера μ сепарабельна и не является чисто атомической**, то 0 принадлежит предельному спектру сопряженного оператора. Для ограниченных операторов справедливо следующее обобщение этого результата.

Теорема 5. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой, не являющейся чисто атомической, $T: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — линейный ограничен-

* Определение идеальных пространств и относящихся к ним понятий, используемых в статье, см. в (4).

** Мера μ не является чисто-атомической, если в X существует μ -измеримое множество X , $\mu(X) > 0$, такое, что $\mu(X \cap \tau) = 0$ для любого атома τ .



ный оператор и оператор TT^* является частично интегральным. Тогда 0 принадлежит предельному спектру оператора T^* .

Заметим, что из частичной интегральности оператора не следует, вообще говоря, принадлежности 0 предельному спектру сопряженного оператора. Действительно, оператор A в примере 1 является частично интегральным, но 0 не принадлежит предельному спектру сопряженного оператора A^* , так как $\|A^*f\| = \|f\|$ для всех $f \in L_2(0, 1)$.

Теорема 6. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, не являющейся чисто атомической, $E(X, \mu)$ — идеальное пространство, носитель пространства $E(X, \mu)$ совпадает с X и двойственное к $E(X, \mu)$ пространство является правильным. Пусть $T: E(X, \mu) \rightarrow E(X, \mu)$ — компактный по мере* линейный ограниченный оператор. Тогда 0 принадлежит предельному спектру сопряженного оператора.

Из теоремы 6 следует, в частности, что предельный спектр оператора T^* , сопряженного к интегральному оператору $T: E(X, \mu) \rightarrow E(X, \mu)$, содержит 0 и, следовательно, 0 принадлежит спектру интегрального оператора T . Заметим, однако, что предельный спектр интегрального оператора может и не содержать точку 0. Действительно, сопряженный к оператору A (см. пример 1) оператор A^* является интегральным карлемановским оператором, но, как отмечалось выше, точка 0 не принадлежит предельному спектру оператора A^* .

В заключение приведем достаточное условие принадлежности 0 предельному спектру частично интегрального оператора.

Теорема 7. Пусть (X, μ) — пространство с неатомической мерой, $E(X, \mu)$ — идеальное пространство, $T: E(X, \mu) \rightarrow E(X, \mu)$ — частично интегральный оператор с ядром $K(s, t)$. Если существует μ -измеримое множество $\Omega \subset X$, $\mu\Omega > 0$, и элемент $k_\Omega \in (E(X, \mu))^0 = \{f \in E, \lim_{\mu D \rightarrow 0} \|\chi_D f\|_E = 0\}$ такие, что для каждого μ -измеримого множества $e \subset \Omega$

$$\left| \int_e K(s, t) d\mu(t) \right| \leq k_\Omega,$$

то 0 принадлежит предельному спектру оператора T .

Из теоремы 7 следует, что оператор A^* , будучи интегральным карлемановским оператором в $L_2(0, 1)$, не регулярен как оператор из $L^\infty(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ и, следовательно, не регулярен как оператор из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ (другой пример нерегулярного интегрального оператора в $L_2(0, 1)$ был построен ранее Б. С. Митягиным (см. ⁽⁹⁾, стр. 78)). Заметим еще, что оператор A не регулярен как оператор из $L_2(0, 1)$ в $M(0, 1)$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
18 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. Aronszajn, P. Szeptycki, Math. Ann., v. 163, N 2, 127 (1966). ² В. Б. Коротков, ДАН, т. 198, № 4, 755 (1971). ³ B. Maurey, C. R., v. 274, № 17, 1304 (1972). ⁴ Функциональный анализ, под ред. С. Г. Крейна, 2 изд., М., 1972. ⁵ И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963. ⁶ J. Neumann, Actualités Sci. et Ind., 1935, p. 229. ⁷ В. Б. Коротков, ДАН, т. 190, № 6, 1274 (1970). ⁸ J. Weidmann, Manuscripta Math., v. 2, 1, 1 (1970). ⁹ М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.

* Оператор называется компактным по мере ⁽⁹⁾, если образ каждого ограниченного по норме множества является компактным по мере.