Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 517.91/4

МАТЕМАТИКА

А. М. МУХСИНОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 I 1974)

В этой заметке обобщаются некоторые результаты работ ([1-4]), в которых дифференциальные включения изучались в конечномерном пространстве. Примем обозначения: E — банахово пространство; $I=[t_0, t_0+a]$, $a>0$; если X — непустое множество, то 2^X — множество всех непустых множеств из X; если $M\subset E$, то $\overline{M}$ — замыкание ($\mathrm{co}\, M$ — выпуклая оболочка, $\overline{\mathrm{co}}\, M$ — замкнутая выпуклая оболочка) множества M; B — шар ненулевого радиуса с центром в фиксированной точке $x_0\in E$; $\chi(A, B)$ — отклонение по Хаусдорфу непустых множеств A и B из E (см. ([2], [5])).

Всюду в дальнейшем интеграл от абстрактной функции понимается в смысле Бохнера относительно меры Лебега на I. Отображение φ: $I\to E$ будем называть $\mathscr{A}$-непрерывным, если найдется такое интегрируемое отображение v: $I\to E$, что

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \qquad \forall t\in I.$$

Пусть задано отображение F: $B\times I\to 2^E$. Тогда дифференциальным включением называется соотношение вида

$$\dot{x}\in F(x, t), \tag{1}$$

где $\dot{x}=dx/dt$ — сильная производная. Решением (классическим решением) включения (1) называется всякое $\mathscr{A}$-непрерывное (непрерывно дифференцируемое) отображение φ: $T\to B$, где T — отрезок из I, удовлетворяющее включению $\dot{\varphi}(t)\in F(\varphi(t), t)$ для почти всех (для всех) $t\in T$. Отображение Φ: $Z\to 2^X$ (где Z — измеримое пространство, а X — топологическое пространство) называется измеримым, если для любого замкнутого множества $M\subset X$ множество $\Phi^-(M)=\{z\in Z\colon \Phi(z)\cap M\neq\varnothing\}$ измеримо в Z (см. ([1], [9])). Отображение Φ: $X\to 2^Y$, где X и Y — два топологических пространства, называется полунепрерывным снизу (сверху), если для любого открытого (замкнутого) множества $K\subset Y$ множество $\Phi^-(K)$ открыто (замкнуто) в X (см. ([5], [7])). Метризуемое топологическое пространство называется пространством Суслина, если оно является непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства (см. ([8])). Отображение φ: $X\mapsto Y$ называется селектором отображения Φ: $X\to 2^Y$, если $\varphi(x)\in\Phi(x)$ для любого $x\in X$.

Лемма 1. *Пусть T — метризуемое локально-компактное пространство с мерой Радона, X — пространство Суслина, а измеримые отображения Φ_n: $T\to 2^X$, $n=1, 2,\ldots$, такие, что для каждого $t\in T$ множество $\Phi_n(t)$ замкнуто при любом n.*

Тогда отображение $t\to \bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)$ тоже измеримо.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 1.*

Тогда отображения $t \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi_{n+i}(t)$ *и* $t \to \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi_{n+k}(t)}$ *также измеримы.*

Лемма 2. *Пусть T и X — такие же как в лемме 1, Y — метризуемое пространство, отображение P: $Y \times T \to 2^X$ такое, что множество $P(y, t)$ замкнуто при $(y, t) \in Y \times T$, частное отображение $y \to P(y, t)$ непрерывно (см. ([2])) для почти всех $t \in T$, а отображение $t \to P(y, t)$ измеримо для любого фиксированного $y \in Y$.*

Тогда для каждого измеримого отображения φ: $T \to Y$ сложное отображение $t \to P(\varphi(t), t)$ измеримо.

Леммы 3 и 3′ следуют из ([7]).

Лемма 3. *Пусть X — паракомпакт, а отображение Φ: $X \to 2^E$ полунепрерывно снизу.*

Тогда для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in \overline{\text{co}}\, \Phi(x)$ отображение $x \to \overline{\text{co}}\, \Phi(x)$ имеет такой непрерывный селектор φ, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Лемма 3′. *Если в лемме 3, X — совершенно нормальное пространство и $E = R^n$, то для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in \text{co}\, \Phi(x)$ отображение $x \to \text{co}\, \Phi(x)$, $x \in X$, имеет такой непрерывный селектор φ, что $\varphi(x_0) = y_0$.*

Лемма 4. *Пусть T — измеримое пространство, Y — полное сепарабельное метрическое пространство.*

Тогда любое измеримое отображение Φ: $T \to 2^Y$ такое, что $\Phi(t)$ замкнуто для всех $t \in T$, имеет измеримый селектор.

Лемма 4 вытекает из ([9]).

Теорема 1. *Пусть банахово пространство E сепарабельно, множество $F(x, t)$ замкнуто для любой точки $(x, t) \in B \times I$, а отображение $t \to F(x, t)$ измеримо на I при любом фиксированном $x \in B$. Пусть суммируемые функции λ_k: $I \to R$ такие, что для любых точек x, y из B и для почти всех $t \in I$*

$$\chi(F(x, t), F(y, t)) \leqslant \lambda_1(t) \cdot \|x - y\|; \qquad \inf \{\|v\|:\ v \in F(x_0, t) \leqslant \lambda_2(t).$$

Тогда задача

$$\dot\varphi(t) \in F(\varphi(t), t), \quad \varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

имеет хотя бы одно решение.

Замечание. Если отображение F однозначное, то теорема 1 верна и без предположения о сепарабельности E и при этом задача (2) имеет единственное решение.

Теорема 2. *Пусть $E = R^n$, а отображение F полунепрерывно снизу. Тогда для любой точки $v_0 \in \text{co}\, F(x_0, t_0)$ задача*

$$\ddot\varphi(t) \in \text{co}\, F(\varphi(t), t), \quad \varphi(t_0) = x_0, \quad \dot\varphi(t_0) = v_0$$

имеет классическое решение.

Теорема 2 есть непосредственное следствие леммы 3′ и теоремы существования Пеано.

Пусть Φ: $I \mapsto 2^E$ и $t_i \in I$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(\tau)\, d\tau \overset{\text{def}}{=} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau)\, d\tau:\ \varphi - \text{интегрируемый селектор отображения } \Phi \right\}.$$

Отображение Φ называется ограниченным функцией λ: $I \to R$, если $\sup \{\|y\|:\ y \in \Phi(t)\} \leqslant \lambda(t)$ при всех $t \in I$; при этом если λ — константа, то Φ называется просто ограниченным.

Теорема 3. *Пусть банахово пространство E сепарабельно и равномерно выпукло, а отображение F полунепрерывно сверху и ограничено суммируемой функцией.*

Тогда для того, чтобы непрерывное отображение φ: $I\to B$ было решением включения $\dot{x}\in\overline{\mathrm{co}}\,F(x,t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(t_2)\in\varphi(t_1)+\overline{\int\limits_{[t_1,t_2]}F(\varphi(\tau),\tau)\,d\tau}$$

для любых t_1, $t_2\in I$ таких, что $t_1<t_2$.

В дальнейшем предполагается выполненным следующее предположение: существует константа $c\geqslant 0$ такая, что для любого непустого множества $\Omega\subset B$ выполнено неравенство

$$\alpha(F[\Omega\times I])\leqslant c\cdot\alpha(\Omega),$$

где α — мера некомпактности Куратовского (см. [6]) и

$$F[\Omega\times I]=\bigcup_{(x,t)\in\Omega\times I}F(x,t).$$

Лемма 5. *Существуют число $\delta>0$ и непустое выпуклое компактное множество $K\subset E$ такие, что*

$$K=x_0+\overline{\bigcup_{0\leqslant\gamma\leqslant\delta}\gamma\cdot\mathrm{co}\,F[K\times I]}.$$

Теорема 4. *Пусть число l такое, что*

$$\chi(F(x,t),F(y,\tau))\leqslant l\|x-y\|+l|t-\tau|\qquad\forall x,\ y\in B;\quad t,\ \tau\in I.$$

Тогда для любой точки $v_0\subset\overline{F(x_0,t_0)}$ задача

$$\dot\varphi(t)\in\overline{F(\varphi(t),t)},\quad \varphi(t_0)=x_0,\quad \dot\varphi(t_0)=v_0 \tag{3}$$

имеет классическое решение.

Теорема 5. *Пусть отображение F непрерывно.*

Тогда для любой точки $v_0\in\overline{F(x_0,t_0)}$ задача (3) *имеет хотя бы одно решение, у которого всюду в области его определения, кроме не более чем счетного множества точек, производная существует, ограничена и непрерывна, а в этих точках имеет разрывы первого рода.*

Теорема 6. *Пусть отображение F полунепрерывно снизу.*

Тогда для любой точки $v_0\in\overline{\mathrm{co}}\,F(x_0,t_0)$ задача

$$\dot\varphi(t)\in\overline{\mathrm{co}}\,F(\varphi(t),\ t),\quad \varphi(t_0)=x_0,\quad \dot\varphi(t_0)=v_0.$$

имеет классическое решение.

Теорема 6 следует из леммы 3 и теоремы 3.5.2 работы [6].

Теорема 7. *Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть отображение $x\to F$ $(x,\ t)$ полунепрерывно сверху для почти всех $t\in I$, а отображение $t\to F(x,t)$ измеримо для любого $x\in B$.*

Тогда задача

$$\dot\varphi(t)\in\mathrm{co}\,F(\varphi(t),\ t),\quad \varphi(t_0)=x_0$$

имеет хотя бы одно решение.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Ф. Филиппов*, ДАН, т. 151, № 1, 65 (1963). [2] *А. Ф. Филиппов*, Вестн. Московск. унив., сер. I, матем., мех., № 3, 16 (1967). [3] *А. Ф. Филиппов*, Матем. заметки, т. 10, № 3, 307 (1971). [4] *Е. А. Барбашин, Ю. И. Алимов*, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 1, 3 (1962). [5] *К. Куратовски*, Топология, т. 1, М., 1966. [6] *Б. Н. Садовский*, УМН. т. 27, в. 1 (163), 81 (1972). [7] *E. Michael*, Ann. Math., v. 63, № 2, 361 (1956). [8] *N. Bourbaki*, Topologie générale, Ch. 9, Paris, 1958. [9] *K. Kuratowski, C. Rull-Nardzewski*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys., v. 13, № 6, 397 (1965).