Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 513.88.517.397 МАТЕМАТИКА

М. А. НАЙМАРК

О ПРЯМОМ ИНТЕГРАЛЕ ПАР ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 24 XII 1973)

1. Билинейные формы на паре пространств. Пусть E, F — два векторных пространства над C, (ξ, η), $\xi \in E$, $\eta \in F$,— билинейная форма на E, F, со значениями в C (по поводу применяемой в этой статье терминологии см. ([1]), см. также ([2])); билинейную форму (ξ, η) мы будем кратко называть формой на E, F, а пространства E, F вместе с формой (ξ, η) — парой и обозначать $P=\{E, F, (\xi, \eta)\}$; E и F называются пространствами, а (ξ, η) — формой пары P.

Если форма (ξ, η) невырождена, то говорят, что (ξ, η) приводит E и F в двойственность (см., например, ([1]), гл. IV); пара $P= =\{E, F, (\xi, \eta)\}$ называется в этом случае невырожденной.

2. Суммируемые пары. Пусть задано измеримое пространство $\mathcal{T}$ с σ-конечной мерой μ. В дальнейшем измеримость, суммируемость будет означать μ-суммируемость, μ-измеримость, а под мерой множества в $\mathcal{T}$ понимается его μ-мера. Пусть для почти каждого $\tau \in \mathcal{T}$ задана пара $P_\tau = \{E_\tau, F_\tau, (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau\}$. Пусть $S(E_\tau, \mathcal{T})$ — линейное множество вектор-функций $\tau \to \xi_\tau$, $\xi_\tau \in E_\tau$, а $S(F_\tau, \mathcal{T})$ — линейное множество, вектор-функций $\tau \to \eta_\tau$, $\eta_\tau \in F_\tau$, определенных для почти каждого $\tau \in \mathcal{T}$. Пара $S(E_\tau, \mathcal{T})$, $S(F_\tau, \mathcal{T})$ называется суммируемой, если функция $\tau \to (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau$ суммируема для каждых

$$\{\xi_\tau\} \in S(E_\tau, \mathcal{T}), \quad \{\eta_\tau\} \in S(F_\tau, \mathcal{T}).$$

Множество всех суммируемых пар частично упорядочим по включению, считая, что $\{S_1(E_\tau, \mathcal{T}), S_1(F_\tau, \mathcal{T})\} < \{S_2(E_\tau, \mathcal{T}), S_2(F_\tau, \mathcal{T})\}$, если $S_1(E_\tau, \mathcal{T}) \subset S_2(E_\tau, \mathcal{T})$ и $S_1(F_\tau, \mathcal{T}) \subset S_2(F_\tau, \mathcal{T})$. Применяя лемму Цорна, заключаем, что:

I. *Множество всех суммируемых пар содержит максимальные суммируемые пары* *.

II. *Всякая суммируемая пара содержится в некоторой максимальной суммируемой паре.*

III. *Суммируемая пара $S(E_\tau, \mathcal{T})$, $S(F_\tau, \mathcal{T})$ максимальна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *если $\tau \to (\xi_\tau, \eta)_\tau$ — суммируемая функция на $\mathcal{T}$ для каждой $\{\xi_\tau\} \in \in S(E_\tau, \mathcal{T})$, то $\{\eta_\tau\} \in S(F_\tau, \mathcal{T})$;*

2) *если $\tau \to (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau$ — суммируемая функция на $\mathcal{T}$ для каждой $\{\eta_\tau\} \in \in S(F_\tau, \mathcal{T})$, то $\{\xi_\tau\} \in S(E_\tau, \mathcal{T})$.*

IV. *Если $S(E_\tau, \mathcal{T})$, $S(F_\tau, \mathcal{T})$ — максимальная суммируемая пара и числовая функция $\tau \to \omega_\tau \in L^\infty(\mathcal{T}, \mu)$, то из $\{\xi_\tau\} \in S(E_\tau, \mathcal{T})$ следует $\{\omega_\tau \xi_\tau\} \in S(E_\tau, \mathcal{T})$ и из $\{\eta_\tau\} \in S(F_\tau, \mathcal{T})$ следует $\{\omega_\tau \eta_\tau\} \in S(F_\tau, \mathcal{T})$.*

---

* Среди максимальных суммируемых пар имеются тривиальные суммируемые пары $\{S_m(E_\tau, \mathcal{T}), (0)\}$ и $\{(0), S_m(F_\tau, \mathcal{T})\}$, где $S_m(E_\tau, \mathcal{T})$, $S_m(F_\tau, \mathcal{T})$ — множество всех $\tau \to \xi_\tau$ (соотв. $\tau \to \eta_\tau$). Разумеется, представляют интерес нетривиальные суммируемые пары.

Отметим, что максимальная суммируемая пара определяется не единственным образом (см. ниже пример 1 в п. 4), так что на самом деле для данного семейства P_τ, $\tau\in\mathcal{T}$, может существовать много различных максимальных суммируемых пар.

3. Измеримые семейства пар, прямой интеграл пар. Пусть $\mathcal{T}$, P_τ и μ — те же, что и в п. 2, и пусть $S(E_\tau, \mathcal{T})$, $S(F_\tau, \mathcal{T})$ — отвечающая им фиксированная максимальная суммируемая пара. Семейство $P_\tau=\{E_\tau, F_\tau, (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau\}$, $\tau\in\mathcal{T}$, невырожденных пар называется измеримым, если существуют такие две последовательности вектор-функций $\{\xi_\tau{}^n\}\in S(E_\tau, \mathcal{T})$, $\{\eta_\tau{}^n\}\in S(F_\tau, \mathcal{T})$, $n=1, 2, 3, \ldots$, что для почти каждого $\tau\in\mathcal{T}$ множества

$$E_\tau{}^0=\{\xi_\tau{}^n, n=1. 2, 3, \ldots\} \quad \text{и} \quad F_\tau{}^0=\{\eta_\tau{}^n, n=1, 2, 3, \ldots\}$$

плотны в E_τ и F_τ в σ-топологиях E_τ и F_τ.

Пусть $P_\tau=\{E_\tau, F_\tau, (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau\}$, $\tau\in\mathcal{T}$, — измеримое семейство.

Множества $S(E_\tau, \mathcal{T})$, $S(E_\tau, \mathcal{T})$ можно рассматривать как линейные пространства вектор-функций $\xi=\{\xi_\tau\}$, $\eta=\{\eta_\tau\}$ с поточечным сложением и умножением на число. Обозначим * $E=S(E_\tau, \mathcal{T})$, $F=S(F_\tau, \mathcal{T})$ и определим в E, F билинейную форму (ξ, η), полагая

$$(\xi, \eta)=\int\limits_{\mathcal{T}} (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau\, d\mu$$

при $\xi=\{\xi_\tau\}\in E$, $\eta=\{\eta_\tau\}\in F$.

V. *Если $(\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau$ невырождена на E_τ, F_τ для почти каждого $\tau\in\mathcal{T}$, то (ξ, η) невырождена на E, F.*

Таким образом $E=S(E_\tau, \mathcal{T})$, $F=S(F_\tau, \mathcal{T})$ и $(\xi, \eta)=\int\limits_{\mathcal{T}}(\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau d\mu$ определяют невырожденную пару $P=\{E, F, (\xi, \eta)\}$; эта пара P называется прямым интегралом пар P_τ по мере μ и обозначается $P=\int\limits_{\mathcal{T}} P_\tau d\mu$ или подробнее

$$\{E, F, (\xi, \eta)\} = \int\limits_{\mathcal{T}} \{E_\tau, F_\tau, (\xi_\tau, \eta_\tau)_\tau)\}\, d\mu. \tag{3,1}$$

Отметим, что определения измеримого семейства пар и прямого интеграла, вообще говоря, зависят от выбора максимальной суммируемой пары.

4. Примеры. 1) Прямой интеграл экземпляров одной и той же пары взаимно дуальных банаховых пространств. Пусть E_0 — рефлексивное банахово пространство, $F_0=E_0'$ и $(\xi, \eta)_0=\eta(\xi)$ для $\xi\in E_0$, $\eta_0\in F_0=E_0'$. Тогда $P_0=\{E_0, F_0, (\xi, \eta)_0\}$ — пара. Пусть $\mathcal{T}$, μ — те же, что и выше, а p, q — фиксированные положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$1<p<\infty, \quad 1/p+1/q=1;$$

тогда также $1<q<\infty$. Каждому $\tau\in\mathcal{T}$ поставим в соответствие одну и ту же пару $P_\tau=P_0$ и определим максимальную суммируемую пару E, F и прямой интеграл $P=\{E, F, (\xi, \eta)\}=\int\limits_{\mathcal{T}} P_0 d\mu$ следующим образом.

Обозначим через $L_{E_0}{}^p(\mathcal{T}, \mu)$ банахово пространство всех классов эквивалентности μ-измеримых вектор-функций $\tau\to\xi_\tau$ со значениями в E_0, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathcal{T}} |\xi_\tau|^p\, d\mu<\infty$$

* Точнее, как обычно, E и F — классы эквивалентности вектор-функций. Две вектор-функции считаются эквивалентными, если они отличаются только на множестве меры нуль.

и с нормой

$$|\xi|_p = \left(\int\limits_{\mathcal{T}} |\xi_\tau|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

(ср. ([3]), гл. IV, § 2, п. 4; там $\mathcal{T}$ — локально-компактное топологическое пространство, но это несущественно в рассматриваемом случае); аналогично определим $L_{E_0'}{}^q(\mathcal{T}, \mu)$. Тогда $L_{E_0}{}^p(\mathcal{T}, \mu)$, $L^q_{E_0'}, (\mathcal{T}, \mu)$ образуют суммируемую пару относительно билинейной формы

$$(\xi, \eta) = \int\limits_{\mathcal{T}} (\xi_\tau, \eta_\tau)_0 \, d\mu \tag{4,1}$$

при $\xi = \{\xi_\tau\} \in L_{E_0}{}^p(\mathcal{T}, \mu)$, $\quad \eta = \{\eta_\tau\} \in L^q_{E'_0}, (\mathcal{T}, \mu)$

VI. *Пространства* $L_{E_0}{}^p(\mathcal{T}, \mu)$, $L^q_{E_0'}(\mathcal{T}, \mu)$ *образуют максимальную суммируемую пару относительно формы* (4,1).

Очевидно, $L_{E_0}{}^p(\mathcal{T}, \mu)$ зависит от выбора p; следовательно, приведенный пример показывает, что для одних и тех же $\mathcal{T}$, μ, E_τ существует много различных максимальных суммируемых пар, а значит, много различных прямых интегралов. Это, однако, несущественно, поскольку в дальнейшем будут ставиться задачи о разложении заданной пары в прямой интеграл. Точная постановка одной из таких задач и ее решение будут даны в одной из следующих статей автора.

2) Прямой интеграл гильбертовых пространств. Гильбертово пространство H находится в двойственности с самим собой, если в качестве соответствующей формы на $H \times H$ взять $(\xi, \eta) = \langle J\xi, \eta \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение на H, а J — комплексное сопряжение в H. Таким образом, в рассматриваемом случае соответствующая пара P имеет вид

$$P = \{H, H, (\xi, \eta)\}.$$

Пусть снова $\mathcal{T}$ — пространство с σ-конечной мерой μ, а H_τ, $\tau \in \mathcal{T}$, — измеримое по фон Нейману семейство гильбертовых пространств. Этому семейству отвечает семейство пар $P_\tau = \{H_\tau, H_\tau, (\xi, \eta)_\tau\}$, где $(\xi, \eta) = \langle J_\tau \xi, \eta \rangle_\tau$, $\langle \xi, \eta \rangle_\tau$ — скалярное произведение, а J_τ — сопряжение в H_τ. Пусть H — прямой интеграл сепарабельных гильбертовых пространств H_τ на $\mathcal{T}$ в смысле фон Неймана (см. ([4]), ([5]) или ([6]), § 41):

$$H = \int\limits_{\mathcal{T}} H_\tau d\mu,$$

и $\langle \xi, \eta \rangle$ — скалярное произведение в H; $\{H, H\}$ — максимальная суммируемая пара относительно (ξ, η). Это означает, что пара $P = \{H, H, (\xi, \eta)\}$ есть прямой интеграл пар P_τ,

$$P = \int\limits_{\mathcal{T}} P_\tau \, d\tau;$$

следовательно:

VII. *Определение прямого интеграла пар, данное в п. 3, содержит, как частный случай, прямой интеграл гильбертовых пространств в смысле фон Неймана.*

5. Суммируемые семейства операторов и операторы, ими порожденные. Пусть $\mathcal{T}$, μ, P, P_τ — те же, что и в п. 3, и пусть E, F — максимальная суммируемая пара, так что выполнено (3, 1). Пусть A_τ, $\tau \in \mathcal{T}$, — семейство операторов в E_τ, $\tau \in \mathcal{T}$, определенное для μ-почти каждого $\tau \in \mathcal{T}$. Семейство A_τ называется суммируемым (относительно E, F), если из $\{\xi_\tau\} \in E$ следует $\{A_\tau \xi_\tau\} \in E$; аналогично определяется и суммируемость для семейства B_τ, $\tau \in \mathcal{T}$, операторов в F_τ.

VIII. *Пусть* A_τ *непрерывен в топологии* $\sigma(E_\tau, F_\tau)$ *для* μ*-почти каждого* $\tau \in \mathcal{T}$: *если* A_τ — *суммируемое семейство, то* A_τ^* *есть также суммируемое семейство.*

Пусть A_τ — суммируемое семейство. Определим операторы A и B в E и F по формулам

$$A\{\xi_\tau\}=\{A_\tau \xi_\tau\}, \quad B\{\xi_\tau\}=\{A_\tau^* \eta_\tau\}. \tag{5,1}$$

Из определения суммируемого семейства и предположения VIII следует, что A и B определены во всем E и F соответственно. При этом для $\xi=\{\xi_\tau\}\in E$, $\eta=\{\eta_\tau\}\in F$

$$(A\xi, \eta)=\int\limits_{\mathcal{T}} (A_\tau \xi_\tau, \eta_\tau)\, d\mu=\int\limits_{\mathcal{T}} (\xi_\tau, A_\tau^* \eta_\tau)_\tau\, d\mu=(\xi, B\eta). \tag{5,2}$$

Из (5,2) следует, что A непрерывен в топологии $\sigma(E, F)$ и $B=A^*$.

Таким образом, справедливо утверждение

IX. *Если* A_τ, $\tau\in\mathcal{T}$, — *суммируемое семейство, то формулы* (5,1), (5,2) *определяют операторы* A, B, *непрерывные в* $\sigma(E, F)$*- и* $\sigma(F, E)$*-топологиях соответственно и* $B=A^*$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Бурбаки*, Топологические векторные пространства, М., 1959. [2] *J. M. G. Fell*, Acta math., v. 114, 267 (1965). [3] *Н. Бурбаки*, Интегрирование (меры, интегрирование мер), «Наука», 1967. [4] *J. V. Neumann*, Ann. Math., v. 50, 401 (1949). [5] *J. Dixmier*, Les algebres d'operateur dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann), Paris, 1957. [6] *М. А. Наймарк*, Нормированные кольца, «Наука», 1968.