Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 517.88+517.948

МАТЕМАТИКА

М. А. ПЕККЕР

РЕЗОНАНСЫ ПРИ РАССЕЯНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПЛОТНОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 I 1974)

Настоящая работа посвящена изучению высокочастотных серий резонансов, возникающих при рассеянии акустических волн на сферически симметричных неоднородностях плотности среды.

Рассматривается случай сферически симметричного рассеивателя в трехмерном пространстве, когда плотность среды $\rho=\rho(r)$ имеет скачок на границе шара $(r=a)$, либо особенность типа бесконечного разрежения $(\rho(a)=0)$ или сгущения $(\rho(a)=\infty)$ и постоянна $(\rho\equiv1)$ вне шара. Математически строго теория разложений по резонансным состояниям может быть развита в рамках теории рассеяния.

В трехмерном пространстве рассматривается волновое уравнение $\frac{d^2}{dt^2}u=\frac{1}{\rho}\Delta u$. После разделения переменных получим

$$\frac{d^2}{dt^2}v_l(r,t)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{d^2}{dr^2}v_l-\frac{l(l+1)}{r^2}v_l\right],\quad v_l=ru_l,\quad l=0,1,2,\ldots$$

С каждым из уравнений свяжем пространство двухкомпонентных вектор-функций $\mathscr{H}_l$, получаемое пополнением гладких финитных данных в энергетической метрике

$$\|v\|^2_{\mathscr{H}_l}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\,|v_0'|^2+\frac{l(l+1)}{r^2}|v_0|^2+\rho(r)|v_1|^2\right]dr.$$

Следуя схеме Лакса — Филлипса, в $\mathscr{H}_l$ вводим уходящее D_+^l и приходящее D_-^l подпространства. В качестве D_+^l (D_-^l) берем все решения волнового уравнения с ограниченной энергией, равные нулю в верхнем (нижнем) световом конусе.

Нетрудно установить ортогональность этих подпространств. D_+^l и D_-^l вместе заполняют энергетическое пространство $\mathscr{H}_l^0$, связанное с невозмущенным волновым уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2}v=\frac{d^2}{dr^2}v-\frac{l(l+1)}{r^2}v,\quad r\geqslant a,$$

$$v(a)=0,\quad v(r,0)=v_0(r),\quad v_t(r,0)=v_1(r).$$

Пусть $\mathscr{H}_l\ominus\mathscr{H}_l^0=K_l$. Подпространство K_l состоит из данных $v\in\mathscr{H}_l$ таких, что $v_1(r)=0$ при $r>a$, $v_0(r)=v_0(a)a^lr^{-l}$ при $r>a$.

В пространстве K_l действует полугруппа операторов сжатия $Z_+(t)$, $t>0$, порожденная волновым уравнением для компоненты v_l^0. Мы покажем, что собственные функции генератора этой полугруппы $\mathscr{B}_+^l$ образуют базис Рисса пространства K_l. Для установления фактов, связанных с безусловной базисностью, перейдем к приходящему спектральному представлению, ассоциированному с разрешающей группой $U_l(t)$ для уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}u=\frac{1}{\rho}\left[\frac{d^2}{dr^2}u-\frac{l(l+1)}{r^2}u\right],\quad l=0,1,2,\ldots$$

В этом представлении подпространство $\mathscr{H}_l\ominus D_+{}^l\ominus D_-{}^l$ превращается в подпространство $K_l=H_+{}^2\ominus[S_l(k)]^{-1}H_+{}^2$, где $S_l(k)$ — матрица рассеяния, явно выражаемая через решения Йоста $f^l(r,k)$ по формуле $S_l(k=$ $=f^l(0,k)[f^l(0,-k)]^{-1}$. Полугруппа $Z_+(t)$ в этом представлении совпадает с «модельной» полугруппой $Pe^{ikt}P$, $t>0$. Здесь P — ортопроектор в $H_+{}^2$ на подпространстве K_l. Для характеристики свойств базисности системы собственных функций оператора $\mathscr{B}_+{}^l$ достаточно проанализировать распределение корней и полюсов мероморфной функции $[S_l(k)]^{-1}$. С этой целью строятся равномерные асимптотические представления для решения Йоста $f^l(r,k)$, $r\in[0,a]$.

Пусть функция ρ обладает следующими свойствами:

1) $\rho(r)\equiv 1$, $r>a$; $\rho(a-0)\neq\rho(a+0)$;

2) ρ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\ a]$, в окрестности точки $r=0$ функция ρ положительна и ограничена;

3) в зависимости от поведения функции ρ в окрестности точки $r=a$ различаются следующие 3 случая:

I. $0<C_1\leqslant\rho(r)\leqslant C_2<\infty$, ρ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,a]$;

II. $\rho(r)=(a-r)^{2g-2}\rho_1(r)$, $1<2g<2$, $0<C_3\leqslant\rho_1\leqslant C_4<\infty$, $r\in[0,\ a]$;

III. $\rho(r)=(a-r)^{2g-2}\rho_1(r)$, $1<g<\infty$, $0<C_5\leqslant\rho_1\leqslant C_6<\infty$, $r\in[0,a]$.

В пунктах II и III ρ_1 — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0,\ a]$. Через C_i обозначены постоянные, точные значения которых для нас несущественны.

Следующее утверждение описывает асимптотику корней функции $M^l(k)\equiv r^lf^l(r,k)$ при $r=0$.

Лемма 1. 1) *В случае веса* ρ $(\rho(a)>1)$ *типа* I *асимптотическое распребеление корней* $\{k_n{}^l\equiv\alpha_n{}^l+i\beta_n{}^l\}$ *функции* $M^l(k)$ *дается формулой* *

при четных l

$$\alpha_n{}^l={}^1/_2\ln[(\rho(a))^{1/2}+1)((\rho(a))^{1/2}-1)^{-1}]+o(1/n),\quad \beta_n{}^l=\pi n+o(1/n);$$

при нечетных l

$$\alpha_n{}^l={}^1/_2\ln[((\rho(a))^{1/2}+1)((\rho(a))^{1/2}-1)^{-1}]+o(1/n),\quad \beta_n{}^l=\frac{2n+1}{2}\pi+o(1/n).$$

2) *В случае веса* ρ *типа* II *асимптотическое распределение корней* $\{k_n^{<1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $M^l(k)$ *дается формулой*

$$k_n^{<1}=-\left[\pi n+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{g}\right)\right]\left(\int\limits_0^a\rho^{1/2}\,d\tau\right)^{-1}+o\left(\frac{1}{n}\right);$$

здесь g — *показатель степени в формуле* II *для веса* ρ.

3) *В случае веса* ρ *типа* III *асимптотическое распределение корней* $\{k_n^{>1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *функции* $M^l(k)$ *дается формулой*

$$k_n^{>1}=-\left[\pi n+\left(1-\frac{1}{g}\right)\right]\left(\int\limits_0^a\rho^{1/2}\,d\tau\right)^{-1}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right);$$

---

* Здесь и далее принята асимптотическая, а не абсолютная нумерация корней функции Йоста.

здесь g — показатель степени в формуле III *для веса* ρ; $\alpha=1$ *при* $g<2$, $\alpha<1$ *при* $g=2$, $\alpha=2/g$ *при* $g>2$.

Теперь нетрудно установить безусловную базисность двукомпонентной системы резонансов *

$$\left\{\Phi_n{}^l(r)\equiv\left(\frac{1}{ik_n{}^l}\varphi_n{}^l(r),\varphi_n{}^l(r)\right)\right\}_{n=-\infty}^{\infty},\quad l=0,1,2,\ldots,$$

где $\varphi_n{}^l=f_n{}^l\|f_n{}^l\|^{-1}_{L_{2,\rho}(0,a)}$ в пространстве K_l. Она следует из того, что достаточно далекие корни $\{k_p\}$ функций Йоста удовлетворяют условию

$$|B_p|\equiv\prod_{\substack{n=-\infty\\k_n\neq k_p}}^{\infty}\left|\frac{k_p-k_n}{k_p-\bar{k}_n}\right|\geqslant\delta>0.$$

В случае веса ρ типа I нормированная на единицу система резонансов $\{\Phi_n{}^l\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оказывается близкой к системе собственных функций некоторого диссипативного оператора $\mathscr{L}_{\mathrm{dis}}$. В случае веса ρ типа II или III специальная почти нормированная система резонансов $\{\Phi_n{}^l\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оказывается в определенном смысле близкой к некоторому ортонормированному базису пространства K_l. Более точно, это означает следующее. Пусть $\{\Phi_n{}^D\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — нормированная на единицу система собственных функций самосопряженного оператора $\mathscr{L}^D$:

$$\mathscr{L}^D\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix}\equiv\mathscr{L}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix},\quad\begin{array}{l}f_1(0)=0,\\f_1(a)=0,\end{array}$$

а $\{\Phi_n{}^N\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — нормированная на единицу система собственных функций самосопряженного оператора $\mathscr{L}^N$:

$$\mathscr{L}^NF=\mathscr{L}F,\quad F\equiv(f_0,f_1),\quad f_1(0)=0,\quad f_0'(a)=0.$$

Пусть $\{\Phi_w\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — нормированная на единицу система собственных функций диссипативного оператора $\mathscr{L}_{\mathrm{dis}}$,

$$\mathscr{L}_{\mathrm{dis}}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{dr^2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix},\quad\begin{array}{l}f_1(0)=0,\\f_0'(a)+f_1(a)=0.\end{array}$$

Теорема. *В случае веса* ρ *типа* I, II *или* III *некоторая почти нормированная система резонансов* $\{\Phi_n{}^l\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *является базисом Рисса в* K_l. *Более того, существуют вполне непрерывные операторы* V^l *и* $V_N{}^l$, $V_D{}^l$ *такие,*

---

* Предполагается, что все корни функции $S_l(k)$ просты. В случае, когда имеются кратные корни (их возможно лишь конечное число), следует рассматривать базисность соответствующей системы главных функций (см. ([2])).

что операторы $(I+V^l)$, $(I+V_N{}^l)$, $(I+V_D{}^l)$ *ограниченно обратимы и выполняются соотношения*:

1) *в случае веса* ρ *типа* II

$$\Phi_n{}^l=(I+V_N{}^l)\,\Phi_n{}^N,\qquad V_N{}^l\in\sigma_{p_2},\qquad p_2>4(1/g-1)^{-1}>2,$$

где g — *показатель степени в формуле* II *для веса* ρ;

2) *в случае веса* ρ *типа* III

$$\Phi_n{}^l=(I+V_D{}^l)\,\Phi_n{}^D,\qquad V_D{}^l\in\sigma_{p_3},\qquad p_3>4(1-1/g)^{-1}>2,$$

где g — *показатель степени в формуле* III *для веса* ρ:

3) *в случае веса* ρ *типа* I

$$\Phi_n{}^l=(I+V^l)\,\Phi_n,\qquad V^l\in\sigma_{p_1},\qquad p_1>1.$$

Свойство безусловной базисности двухкомпонентной системы $\{\Phi_n{}^l\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $l=0, 1, 2, \ldots$, в пространстве K_l сохраняется при переходе к соответствующей однокомпонентной системе $\{\varphi_n{}^l\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_{2,\rho}(0, a)$. Более того, если в случае веса ρ типа II или III ортогонализатор системы $\{\Phi_n{}^l\}_{-\infty}^{\infty}$ имеет вид $(I+V^l_{D(N)})$, где $V^l_{D(N)}\in\sigma_{p_2}(p_3)$, то ортогонализатор системы $\{\varphi_n{}^l\}_{n=1}^{\infty}$ имеет такой же вид, т. е. в пространстве $L_{2,\rho}(0, a)$ существует вполне непрерывный оператор $\mathscr{V}_N{}^l$ (вес ρ типа II) или $\mathscr{V}_D{}^l$ (вес ρ типа III), что $(I+\mathscr{V}_N{}^l)$ — ортогонализатор системы $\{\varphi_n{}^l\}_{n=1}^{\infty}$ (соответственно, оператор $(I+\mathscr{V}_D{}^l)$), причем

$$\mathscr{V}_N{}^l\in\sigma_{p_2},\qquad \mathscr{V}_D{}^l\in\sigma_{p_3}.$$

Базисы, возникающие в задачах с весом, имеющим особенность в окрестности $r=a$ (случаи II, III), являются естественным обобщением известных базисов, квадратично близких к ортонормированным (базисов Бари).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
29 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. Лакс, Р. Филлипс*, Теория рассеяния, «Наука», 1970, стр. 312. [2] *В. Э. Кацнельсон*, Функц. анализ и его приложения, т. 1, № 2 (1967). [3] *Б. С. Павлов*, ДАН, т. 196, № 6, 352 (1971). [4] *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 1, 90 (1970). [5] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965.