Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 517.53:517.55

МАТЕМАТИКА

Г. И. СЕЧКИН

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД БАВРИНА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ГРУППАМИ И ПОЛУГРУППАМИ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 XII 1973)

В 1954 г. А. А. Темляков получил ([1]) интегральные представления аналитических функций двух комплексных переменных в ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областях.

В дальнейшем проводились различные распространения формул Темлякова ([2–4]), среди которых необходимо выделить работу ([4]) польских математиков Z. Opial и J. Siciak. Ими, в частности, определен класс областей (T), обобщающий области D' Темлякова. Статья ([5]) подводит итог исследований, направленных на обобщение результатов Темлякова применительно к области $D\in(T)$.

Лемма 1. *Оператор, полученный конечным произведением исходных операторов*

$$L_\gamma^{(1)}[f]=\gamma f+\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu f_\nu' \text{ и } L_\delta^{(-1)}[f]=\int_0^1 \varepsilon^{\delta-1} f(\varepsilon z_1,\ldots,\varepsilon z_n)\,d\varepsilon,$$

где f — голоморфная в звездной области D пространства C^n, $n\geqslant1$, функция, не зависит от порядка исходных операторов и может быть представлен в виде

$$L_{a\tilde{a}}^{(k,-\tilde{k})}[f]=L^{(-\tilde{k})}_{(\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_{\tilde{k}})}[L^{(k)}_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)}[f]], \tag{1}$$

причем $\tilde{\gamma}_i\neq\gamma_j$, $i=1, 2, \ldots, \tilde{k}$, $j=1, 2, \ldots, k$.

Лемма 2. *Оператор, полученный конечным произведением исходных операторов*

$$L_{A_j}^{(1)}[f]=\gamma_j f+\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{(j)} z_\nu f_\nu' \text{ и } L_{\tilde{A}_i}^{(-1)}[f]=\int_0^1 \varepsilon^{\tilde{\gamma}_i-1} f(\varepsilon^{\tilde{\delta}_1^{(i)}} z_1,\ldots,\varepsilon^{\tilde{\delta}_n^{(i)}} z_n)\,d\varepsilon,$$

где f — голоморфная в полной n-круговой ($n\geqslant2$) с центром в начале координат области функция, не зависит от порядка исходных операторов и может быть представлен в виде

$$L_{A\tilde{A}}^{(k,-\tilde{k})}[f]=L^{(-\tilde{k})}_{(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_{\tilde{k}})}[L^{(k)}_{(A_1,A_2,\ldots,A_k)}[f]], \tag{2}$$

причем $\tilde{A}_i\neq A_j$, $i=1, 2, \ldots, \tilde{k}$, $j=1, 2, \ldots, k$.

Лемма 3. *Оператор, полученный конечным произведением исходных обобщенных операторов типа Римана — Лиувилля $L^{(\omega_\kappa)}[f]$ и $M^{(\omega_\kappa)}[f]$, где $f(re^{i\varphi})$ — голоморфная в круге $|z|<R$ функция, не зависит от порядка исходных операторов и может быть представлен в виде*

$$N^{(\omega;\tilde{\omega})}[f]=N^{(\omega_{\gamma_1},\ldots,\omega_{\gamma_m};\,\tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_1},\ldots,\tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_{\tilde{m}}})}[f], \tag{3}$$

причем $\omega_{\gamma_i}\neq\tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_j}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, \tilde{m}$.

Теорема 1. *Множества операторов (1) и (2) обладают структурой свободной абелевой группы с континуальной системой свободных образующих, а множество операторов (3) — структурой свободной абелевой группы с системой свободных образующих, мощность которой равна мощности множества Ω (определение множества Ω см. в* [6]*).*

Доказательство. Пусть S_I — свободная абелева группа, I — система свободных образующих континуальной мощности. Изоморфизм множества операторов, например, (1) и S_I устанавливается, если символу x_γ^{-1} поставить в соответствие индекс γ, а символу $\tilde{x}_\gamma^{-1}$ — индекс $\tilde{\gamma}$. Операции умножения слов соответствует операция произведения операторов.

Интересно отметить, что в работах И. И. Баврина сначала [7, 8] были получены интегральные представления, связанные с полугруппами операторов, а уже позднее [5, 9] (в силу лемм 1—3) — с группами. Подобное обобщение И. И. Бавриным было выполнено во всех рассматриваемых им случаях (звездные, выпуклые области, полицилиндр, полные кратнокруговые области, обобщенные операторы типа Римана — Лиувилля), другие же авторы остановились на представлениях в лучшем случае полугруппового характера.

Область, введенную в определении 2 из [10], назовем $D'_{p,q}$. Заменив в этом определении условие

$$0\leqslant r_1'(\tau)<p\frac{r_1(\tau)}{\tau},\quad 0<\tau<1,$$

которое эквивалентно требованию

$$0<\sup_{0<\tau<1}\frac{\tau r_1'(\tau)}{pr_1(\tau)}=\mu_p<1,$$

условием

$$1<\mu_p<+\infty,$$

зададим область, которую обозначим $D''_{p,q}$.

Теорема 2. *Пусть $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области $D''_{p,q}$ и непрерывна вместе с частными производными любого порядка в замкнутой области $\overline{D}'_{p,q}$.*

Тогда имеем интегральное представление, связанное с группой операторов $L_{A\tilde{A}}^{(-k,\tilde{k})}[f]$, т. е. для $(z_1, z_2)\in D''_{p,q}$

$$f(z_1,z_2)=\alpha f(0,0)+\sum_{\nu=1}^{2}\frac{z_\nu^\alpha}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 d\tau\int_{|\zeta|=1}B^{(1-\beta)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(-k,\tilde{k})}\left[\frac{1}{\zeta-u}\right]\right]\times$$
$$\times L_1^{(-\alpha)}\left[B^{(\beta)}\overline{\left[L_{A\tilde{A}}^{(k,-\tilde{k})}\right.}\left[f_\nu^{(\alpha)}(r_1(\tau)\zeta^{np},\ r_2(\tau)\eta^{nq})\right]\right]\Big]\,d\zeta, \tag{4}$$

где

$$u=\tau\left(\frac{z_1}{r_1(\tau)}\right)^{1/(np)}+(1-\tau)\left(\frac{z_2}{r_2(\tau)}\right)^{1/(nq)}e^{it},\quad \eta=\zeta e^{-it},$$

$$B[F(z_1,z_2)]=F(z_1,z_2)+npz_1F'_{z_1}+nqz_2F'_{z_2},$$

$$\alpha=0,\ 1;\quad \beta=0,\ 1,\quad \alpha\leqslant\beta\leqslant 1,$$

n — наименьшее целое число, не меньшее μ_p.

Заменив в определении области G' из [11] условия

$$\frac{r_2'(\omega)}{r_2(\omega)}=-\frac{\omega}{1-\omega}\frac{r_1'(\omega)}{r_1(\omega)}\quad\text{и}\quad r_1'(\omega)\leqslant\frac{r_1(\omega)}{\omega^2},\quad 0<\omega<1,$$

условиями соответственно

$$\frac{r_2'(\omega)}{r_2(\omega)}=-\frac{q}{p}\frac{\omega}{1-\omega}\frac{r_1'(\omega)}{r_1(\omega)}\quad\text{и}\quad r_1'(\omega)\leqslant p\frac{r_1(\omega)}{\omega^2},\quad 0<\omega<1,$$

и рассмотрев топологическое произведение соответствующих областей на римановых поверхностях для функций $\xi=(z_1)^{1/p}$ и $\eta=(z_2)^{1/q}$, p, q — взаимно простые целые числа с условием $pq>0$, перейдем к неограниченным областям $G'_{p,\,q}$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области $G'_{p,\,q}\ni(0, 0)$. Тогда, если $f(z_1, z_2)$ и все ее частные производные любого порядка непрерывны в $\overline{G}'_{p,\,q}$, за исключением точки $(0, \infty)$, то имеем интегральное представление, связанное с группой операторов $L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\,\widetilde{k})}[f]$, т. е. для $(z_1, z_2)\in G'_{p,\,q}$:*

$$f(z_1, z_2)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^1 d\omega\int\limits_0^{2\pi} dt\int\limits_{|\zeta|=1}\lambda(\omega)\,L^{(1)}_{(1,p,0)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{bz_2^{1/q}}}{\zeta-u}\right]\right]\times$$

$$\times L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\zeta^p,\ r_2(\omega)v^q)]\,d\zeta; \tag{5}$$

здесь

$$\lambda(\omega)=e^{-(1-\omega)/\omega}/\omega^2,\qquad u=az_1^{1/p}e^{bz_2^{1/q}},$$

$$a=\frac{e^{-(1-\omega)/\omega}}{(r_1(\omega))^{1/p}},\qquad b=\frac{1-\omega}{\omega(r_2(\omega))^{1/q}}e^{-it},\qquad v=e^{it},$$

$$\int\limits_0^1 d\omega=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_\alpha^1 d\omega,\qquad L^{(1)}_{(1,p,0)}[F(z_1, z_2)]=F(z_1, z_2)+pz_1F'_{z_1}.$$

Определим класс M'' как множество мероморфных функций вида

$$F(z_1, z_2)=\frac{F_1(z_1, z_2)}{f(z_1/z_2)},$$

где $f(\xi)$ — однозначная голоморфная функция со счетным числом любых особых точек в расширенной комплексной плоскости ξ, $P=\bigcup\limits_{k\in N}P_k$, P_k: $f_k(z_1/z_2)=0$ — особая поверхность для функции $F(z_1, z_2)$, $F_1(z_1, z_2)$ — голоморфная функция в области D'' (определение области D'' см. в ([12])) и $L_{a\widetilde{a}}^{(k,-\widetilde{k})}[F_1(z_1, z_2)]$ — непрерывная функция в $\overline{D}''$.

Теорема 4. *Если $F(z_1, z_2)\in M''$, то для $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})\in D''$, но $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})\notin P$, имеем интегральное представление, связанное с группой операторов $L_{a\widetilde{a}}^{(k,-\widetilde{k})}[F_1]$:*

$$F(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})=$$

$$=\alpha\frac{f(0/0)\cdot F(0, 0)}{f(z_1^{(0)}/z_2^{(0)})}+\frac{1}{2-\alpha}\sum_{\nu=1}^{2}\frac{z_\nu^{\alpha(0)}}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{|\zeta|=1}k^{(\alpha)}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)};\ z_1, z_2)\times$$

$$\times\Phi^{(1-\beta)}\left[L_{a\widetilde{a}}^{(-k,\,\widetilde{k})}\left[\frac{1}{\zeta-u}\right]\right]\cdot L_1^{(-\alpha)}[\Phi^{(\beta)}[L_{a\widetilde{a}}^{(k,-\widetilde{k})}[F_\nu^{(\alpha)}(r_1(\tau)\zeta^n,\ r_2(\tau)\eta^n)]]]\,d\zeta, \tag{6}$$

причем

$$u=\tau\left(\frac{z_1^{(0)}}{r_1(\tau)}\right)^{1/n}+(1-\tau)\left(\frac{z_2^{(0)}}{r_2(\tau)}\right)^{1/n}e^{it},\qquad \eta=\zeta e^{-it},\qquad (z_1, z_2)\in\partial D'',$$

$$\Phi[F(z_1,z_2)]=L^{(1)}_{(1,n,n)}[F(z_1,z_2)]=F+nz_1F'_{z_1}+nz_2F'_{z_2},$$

$$k^{(\alpha)}(z_1^{(0)},z_2^{(0)};z_1,z_2)=\frac{f^{\alpha}(z_1/z_2)}{f(z_1^{(0)}/z_2^{(0)})},\quad \alpha=0,\ 1;\quad \beta=0,\ 1;\quad \alpha\leqslant\beta\leqslant1.$$

Формулы (4)–(6) доказываются одним и тем же операторным методом И. И. Баврина. Такие формулы принято называть интегральными представлениями Темлякова – Баврина.

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Поступило 3 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Темляков*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 27, 7 (1954). [2] *Б. А. Фукс*, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [3] *Ли Че Гон*, Сухакка мулли, т. 3, № 1 (1959). [4] *Z. Opial, J. Siciak*, Zesz. nauk. Uniw. Jagiell, № 77, 67 (1963). [5] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 186, № 2 (1969). [6] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5 (1968). [7] *И. И. Баврин*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 166, 3 (1966). [8] *И. И. Баврин*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 188, 3 (1967). [9] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 204, № 4 (1972). [10] *А. А. Темляков*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 57, 4 (1957). [11] *В. Т. Уляшев*, Сборн. тр. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, в. 15 (1) (1973). [12] *А. А. Темляков*, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 96, 6 (1960).