Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 1

УДК 511.4 *МАТЕМАТИКА*

Б. М. БРЕДИХИН

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ НОВОГО МЕТОДА В ТЕРНАРНЫХ И ПОЛУТЕРНАРНЫХ ЗАДАЧАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 XII 1973)

1. Многие аддитивные задачи с простыми числами решаются с помощью метода тригонометрических сумм, созданного И. М. Виноградовым (1). При сведении тригонометрических сумм по простым числам к двойным суммам фундаментальной является идея И. М. Виноградова по «сглаживанию» таких сумм.

В основе дисперсионного метода, разработанного Ю. В. Линником (2), также лежит идея «сглаживания» наряду с рассуждениями, имеющими свои истоки в классической работе П. Л. Чебышева (3). Эта же идея используется в методе большого решета, созданного Ю. В. Линником (4) и позволившего получить ряд теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем (5, 6).

Ю. В. Линник (совместно с автором) разработал в общих чертах новый метод в аналитической теории чисел (7–9), в основе которого лежит названная выше идея И. М. Виноградова в соединении с некоторыми теоремами о простых числах.

Целью этой заметки является упрощение и усиление метода за счет применения некоторого общего эвристического принципа в аддитивных задачах с простыми числами и полной элементаризации доказательств (кроме использования неэлементарной теоремы Зигеля — Вальфиша). В связи с этим сфера применимости метода распространения с тернарных проблем типа теоремы Виноградова о сумме трех простых чисел на некоторые полутернарные задачи, не решаемые круговым методом.

2. Рассмотрим уравнение

$$p+\alpha+\beta=n, \tag{1}$$

где значение p пробегает простые числа, α и β пробегают какие-либо последовательности натуральных чисел с определенными условиями на их распределенность в арифметических прогрессиях с медленно растущей разностью, n — достаточно большое натуральное число.

Пусть $Q(n)$ — число решений уравнения (1).

Уравнение (1) будем называть т е р н а р н ы м, если для $Q(n)$ может быть найдена асимптотика с помощью кругового метода. Уравнение (1) будем называть п о л у т е р н а р н ы м, если оно не решается круговым методом.

Типичным примером тернарного уравнения является уравнение

$$p+p_1+p_2=n, \tag{2}$$

где p, p_1 и p_2 простые, n нечетное.

Следующая теорема доставляет асимптотику для числа ν решений $Q_1(n)$ уравнения (2).

Т е о р е м а В и н о г р а д о в а (1). *При* $n\to\infty$

$$Q_1(n)=\frac{n^2}{2\ln^3 n}\sigma(n)+O\left(\frac{n^2}{\ln^{4-\varepsilon} n}\right), \tag{3}$$

где

$$\sigma(n)=\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p/n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Одним из примеров полутернарного уравнения является уравнение

$$p+p_1^kp_2+p_3^kp_4=n, \tag{4}$$

где p, p_1, p_2, p_3 и p_4 простые, n нечетное, $p_1^k\leqslant n^\alpha$, $p_2\leqslant{}^1/_2n^{1-\alpha}$, $p_3^k\leqslant n^\alpha$, $p_4\leqslant{}^1/_2n^{1-\alpha}$, α и k — фиксированные числа, $0<\alpha<{}^1/_4$, $k>1$ натуральное.

Пусть $Q_2(n)$ — число решений уравнения (4).

Теорема А. *При* $n\to\infty$

$$Q_2(n)=\frac{1}{4}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2\frac{1}{(1-\alpha)^2}\frac{n^{2(1-\alpha)}n^{2\alpha/k}}{\ln^5 n}\sigma(n)+$$

$$+O\left(\frac{n^{2(1-\alpha)}n^{2\alpha/k}}{\ln^{6-\varepsilon}n}\right), \tag{5}$$

где $\sigma(n)$ *определено в* (3).

Наметим общий подход для получения оценок (3) и (5). Заменим уравнение (1) на уравнение

$$\nu+\alpha+\beta=n, \tag{1'}$$

где ν пробегает квазипростые числа, $\nu\leqslant n$, такие, которые не содержат в каноническом разложении простых чисел $p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$, α и β подчиняются условиям из (1). Обозначим через $Q'(n)$ число решений уравнения (1′). При переходе от уравнения (1) к уравнению (1′) область значений переменной p, пробегающей простые числа, расширяется до области значений переменной ν, пробегающей квазипростые числа. Поэтому можем ожидать, что число решений уравнения (1) будет в $K(n)$ раз меньше числа решений уравнения (1′), если $K(n)\sim\pi(n)/\pi'(n)$, где

$$\pi(n)=\sum_{p\leqslant n}1\sim\frac{n}{\ln n},\quad \pi'(n)=\sum_{\nu\leqslant n}1\sim n\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Примем

$$K(n)=\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\frac{1}{\ln n}.$$

Обозначим

$$V=Q(n)-K(n)Q'(n). \tag{6}$$

Рассчитав асимптотику для $Q'(n)$ и показав, что V имеет меньший порядок по сравнению с $K(n)Q'(n)$, получаем асимптотику для $Q(n)$:

$$Q(n)=K(n)Q'(n)(1+o(1)). \tag{7}$$

3. Для выполнения указанных расчетов модифицируем схему из работы ([9]). Вместо использования когерентных чисел, что привело в ([9]) к ограничениям на n, или вместо искусственного конструирования ожидаемых чисел решений уравнений вида

$$p+\nu_1D_1'+\mu_1D_2'=n,\qquad \nu_1\in(\nu_0),\qquad \mu_1\in(\mu_0),$$

к которым сводится уравнение (1), мы оцениваем разность

$$V_1=V_{(\nu_0),(\mu_0)}=\sum_{D_1'}\sum_{D_2'}\left(\sum_{p+\nu_1D_1'+\mu_1D_2'=n}1-K(n)\sum_{\nu+\nu_1D_1'+\mu_1D_2'=n}1\right).$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского и идею И. М. Виноградова по «сглаживанию» двойных сумм, получим

$$V_1^2 \leqslant \Big(\sum_{D_1'}\sum_{D_2'}\Big) V_2,$$

где с допустимой погрешностью

$$V_2=\Sigma_1-2K(n)\Sigma_2+K^2(n)\Sigma_3,$$

$$\Sigma_k=\sum_{\nu_1' p_k\equiv\nu_1 p_k'+(\nu_1'-\nu_1)n \pmod{|\Delta|}} 1, \quad k=1,2,3.$$

В сумме Σ_k пара (p_k, p_k') либо пара простых чисел (при $k=1$), либо пара — простое и квазипростое ($k=2$), либо пара квазипростых чисел ($k=3$); для переменных выполняются условия, определяемые уравнениями (1) и (1'). Модуль $\Delta=\nu_1\mu_1'-\nu_1'\mu_1$.

Положим

$$\Sigma_k={\sum_k}'+{\sum_k}'',$$

$$\Sigma_k'=\sum_{p_k'}\sum_{\Delta}\frac{1}{\varphi(|\Delta|)}\sum_{p_k}1,$$

$$\Sigma_k''=\sum_{p_k'}\Big(\sum_{\nu_1' p_k\equiv l_k \pmod{|\Delta|}}1-\sum_{\Delta}\frac{1}{\varphi(|\Delta|)}\sum_{p_k}1\Big),$$

$$l_k=\nu_1 p_k'+(\nu_1'-\nu_1)n, \qquad (l_k,\ \Delta)=1.$$

Сумма Σ_k' вычисляется с помощью элементарного суммирования, в ходе которого применяется неэлементарная теорема Зигеля — Вальфиша. К сумме Σ_k'' применяется «сглаживание» по переменной p_k', что в случае, когда

$$|\Delta|<\sqrt{n}/(\ln n)^C \tag{8}$$

($C>0$ — большая константа), опять приводит к элементарным вычислениям с использованием теоремы Зигеля — Вальфиша. В результате Σ_1, $K(n)\Sigma_2$ и $K^2(n)\Sigma_3$ совпадут (с допустимой погрешностью), что обосновывает переход от (6) к (7).

Для уравнения (2) полагаем $\nu_1=1$, $D_1'=p_1$, μ_1 простое. При этом с допустимой погрешностью, получаемой при помощи элементарного решета Бруна, можем считать, что $\mu_1<n^{1/2}/(\ln n)^C$.

Для уравнения (4) полагаем $\nu_1=p_1^k$, $D_1'=p_2$, $\mu_1=p_3^k$, $D_2'=p_4$.

Таким образом, для уравнений (2) и (4) условие (8) выполнено.

Следуя рассмотренной схеме, находим для этих уравнений оценку

$$V=O(K(n)Q'(n)/(\ln n)^{1-\varepsilon}). \tag{9}$$

Остается найти асимптотику для $Q'(n)$. Применяя элементарное решето, получим

$$Q'(n)=\sum_{d\leqslant n}\mu(d)\sum_{\alpha\equiv n-\beta \pmod d}1,$$

где d пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

Положим

$$Q'(n)=\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}+\sum_{n^{1/\ln\ln n}<d\leqslant n}=T_1(n)+T_2(n).$$

Для $T_1(n)$ получим асимптотику с помощью метода «сглаживания». Величина $T_2(n)$ войдет в остаточный член, что показывается с помощью решета Бруна и элементарной теоремы о распределении чисел с малыми простыми делителями.

Эти вычисления доставляют в итоге асимптотику для $Q(n)$. Применительно к уравнениям (2) и (4) получаем формулы (3) и (5).

Рассмотренный метод применим к другим уравнениям, аналогичным уравнениям (2) и (4), а также к их алгебраическим обобщениям.

Считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность А. А. Карацубе за ценные советы и внимание к работе.

Куйбышевский государственный
педагогический институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
29 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Виноградов*, Избр. тр. Изд. АН СССР, 1952. [2] *Ю. В. Линник*, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961. [3] *П. Л. Чебышев*, Полное собр. соч., т. 2, Изд. АН СССР, 1947. [4] *Ю. В. Линник*, ДАН, т. 30, № 4 (1941). [5] *Г. Дэвенпорт*, Мультипликативная теория чисел, «Наука», 1971. [6] *H. L. Montgomery*, Topics in Multiplicative Number Theorie, 1971. [7] *Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник*, Матем. зам., т. 12, № 3 (1972). [8] *B. M. Bredihin, Y. V. Linnik*, Acta Arith., v. 21, 1972. [9] *Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник*, В сборн. Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974.