

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 20 XII 1973)

1. Постановка задачи. Слабая ударная волна распространяется вдоль неограниченной плоскости в идеальной сжимаемой среде. В плоскости находится бесконечно длинная прямая щель ширины $2l$. Фронт волны представляет собой плоскость, движущуюся со скоростью звука c . Будем предполагать, что волна падает на щель из нижнего полупространства (рис. 1). Вектор скорости движения фронта волны \vec{c} образует с плоскостью угол β , $0 < \beta \leq \pi/2$ (¹⁻³).

Возьмем прямоугольную систему осей координат Oxz . Потенциал скорости возмущенного течения газа удовлетворяет волновому уравнению

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} - \frac{1}{c^2} \Phi_{tt} = 0. \tag{1}$$

Представим потенциал скорости в виде $\Phi = \Phi_0 + \varphi$; функция $\Phi_0(x, z, t)$ есть заданный потенциал скорости в падающей волне (^{4, 5}). Искомый потенциал φ в области дифракции найдем из следующей начально-краевой задачи: функция φ удовлетворяет уравнению (1), условию $\varphi(x, -z, t) = -\varphi(x, z, t)$ и условиям на оси Ox :

на плоскости за фронтом падающей волны

$$\varphi_z = -[\varphi_{0z}(x, z, t)]_{z=0} = A(x, t), \tag{2}$$

на щели

$$\varphi = 0. \tag{3}$$

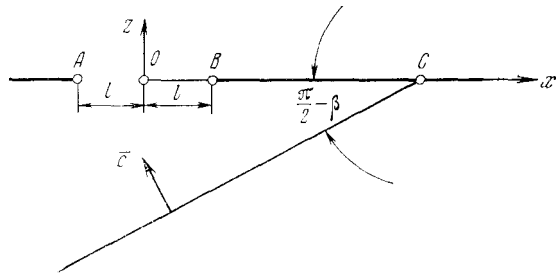


Рис. 1

2. Для решения задачи применим метод интегральных уравнений Абея (⁶).

Рассмотрим пространство переменных x, z и t (⁷). Определим в плоскости xt области Σ и Σ' , в которых задано условие (2), и область Σ_0 , в которой задано условие (3). Область Σ ограничена прямой W , изображающей закон движения точки пересечения фронта падающей волны с осью Ox (точка C на рис. 1) и прямой L_0 . Прямая L_0 параллельна оси времени Ot и находится от нее на расстоянии l в области отрицательных значений x . Область Σ' ограничена прямой W и прямой L_1 , параллельной оси Ot и отстоящей от нее на расстоянии l в области положительных значений x . Границами области Σ_0 служат прямые W, L_0 и L_1 (рис. 2).

Точки $A_{2n}(-l, t_{2n})$ и $B_{2n+1}(l, t_{2n+1})$ на рис. 2 отвечают соответственно точкам A и B — границам щели в моменты возникновения на них цилиндрических дифракционных волн ($n=0, 1, 2, \dots$). Характеристические конусы уравнения (1) с вершинами, расположенными в точках A_{2n} и B_{2n+1} , разделяют пространство xzt на области с различным аналитическим видом решения задачи. В частности, плоская область Σ_0 разделяется на области:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x'_{2i+1}}^{x'_{2i+3}} \int_{\xi''-2l/c}^{t_{2i}} \theta_{2i+1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \\
& - \sum_{i=0}^{n-2} \int_{t_{2i}}^{t'_{2i+2}} \int_{x'_{2i+1}}^{x'_{2i+3}} \theta_{2i,2i+1}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau''.
\end{aligned}$$

Пределы интегрирования t'_{2i-2} и x'_{2i-1} представляют собой координаты точек A_{2i-2} и B_{2i-1} , $i=0, 1, \dots, n$. Через A^* обозначена заданная функция A в новых переменных; функция $\xi'' = -\tau'' \operatorname{tg}^2 1/2\beta$ есть уравнение прямой W . Сумма в выражении Φ^* определена для $n \geq 2$.

Применяя дважды формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим решение уравнения (5) в виде

$$\begin{aligned}
\theta_{2n}(\xi', \tau') &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{[(\xi' - \tau' + 2l/c)(\tau' - t_{2n}')]^{1/2}} \Phi_{2n}\left(\tau' - \frac{2l}{c}, t_{2n}'\right) + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(\tau' - t_{2n}')^{1/2}} \int_{\tau' - 2l/c}^{\xi'} \frac{\partial}{\partial \xi''} \Phi_{2n}(\xi'', t_{2n}') \frac{d\xi''}{(\xi' - \xi'')^{1/2}} + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(\xi' - \tau' + 2l/c)^{1/2}} \int_{t_{2n}}^{\tau'} \frac{\partial}{\partial \tau''} \Phi_{2n}\left(\tau' - \frac{2l}{c}, \tau''\right) \frac{d\tau''}{(\tau' - \tau'')^{1/2}} + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \int_{\tau' - 2l/c}^{\xi'} \int_{t_{2n}'}^{\tau'} \frac{\partial^2}{\partial \xi'' \partial \tau''} \Phi_{2n}(\xi'', \tau'') \frac{d\tau'' d\xi''}{[(\xi' - \xi'')(\tau' - \tau'')]^{1/2}}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Таким же путем находятся производные φ_{z^*} в областях δ_{2n+1} и $\delta_{2n, 2n+1}$. Решение θ_{2n+1} может быть получено из решения θ_{2n} , если в последнем поменять ролями координаты. Решение $\theta_{2n, 2n+1}$ может быть также получено из формулы (7), если в ней вместо выражения $(\tau' - 2l/c)$, представляющего предел интегрирования по ξ'' , положить x'_{2n-1} и вместо функции $\Phi_{2n}(\xi', \tau')$ положить функцию

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n, 2n+1}(\xi', \tau') &= \Phi^*(\xi', \tau') - \int_{t'_{2n}}^{\tau'} \int_{\tau' - 2l/c}^{x'_{2n+1}} \theta_{2n}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau'' - \\
& - \int_{x'_{2n+1}}^{\xi'} \int_{\xi'' - 2l/c}^{t'_{2n}} \theta_{2n+1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \int_{t'_{2n-2}}^{t'_{2n}} \int_{\tau' - 2l/c}^{x'_{2n-1}} \theta_{2n-2}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau'' - \\
& - \int_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}} \int_{\xi'' - 2l/c}^{t'_{2n-2}} \theta_{2n-1}(\xi'', \tau'') K d\tau'' d\xi'' - \int_{t'_{2n-2}}^{t'_{2n}} \int_{x'_{2n-1}}^{x'_{2n+1}} \theta_{2n-2, 2n-1}(\xi'', \tau'') K d\xi'' d\tau''.
\end{aligned}$$

Функции θ_{2n} , θ_{2n+1} , $\theta_{2n, 2n+1}$ при $n=0$ имеют вид (6, 7)

$$\theta_0(\xi', \tau') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(\xi' - \tau' + 2l/c)^{1/2}} \int_{-\tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta}^{\tau' - 2l/c} A^*(\xi'', \tau') \frac{(\tau' - 2l/c - \xi'')^{1/2}}{\xi' - \xi''} d\xi'', \quad (8)$$

$$\theta_1(\xi', \tau') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(\tau' - \xi' + 2l/c)^{1/2}} \int_{-\xi' \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}^{\xi' - 2l/c} A^*(\xi', \tau'') \frac{(\xi' - 2l/c - \tau'')^{1/2}}{\tau' - \tau''} d\tau'', \quad (9)$$

$$\theta_{0,1}(\xi', \tau') = \theta_0(\xi', \tau') + \theta_1(\xi', \tau'). \quad (10)$$

Отправляясь от решений θ_0 , θ_1 , $\theta_{0,1}$, последовательно находим функции θ_2 , θ_3 , $\theta_{2,3}$, θ_4 , θ_5 , $\theta_{4,5}$, ..., θ_{2n} , θ_{2n+1} , $\theta_{2n, 2n+1}$ для любого номера.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
12 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, т. 1, изд. 2, «Наука», 1973. ² Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, «Наука», 1966. ³ Л. И. Седов, ДАН, т. 52, № 1 (1946). ⁴ М. Д. Хаскинд, Л. А. Вайнштейн, Дифракция плоских волн на щели и ленте, В кн.: III Всесоюз. симпозиум по дифракции волн, Реф. докл., «Наука», 1964. ⁵ Е. А. Красильщикова, В кн. Проблемы гидродинамики в механике сплошной среды (к 60-летию академика Л. И. Седова), «Наука», 1969. ⁶ Е. А. Красильщиков, Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М., 1952. ⁷ Е. А. Красильщикова, ДАН, т. 203, № 2 (1972).