Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Л. Б. ШАПИРО

ТРИ ПРИМЕРА В ТЕОРИИ БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 I 1974)

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с бикомпактными расширениями вполне регулярных пространств. В первой части строится пример пространства, обладающего рядом хороших свойств, но не имеющего совершенно-нормального бикомпактного расширения. Во второй части строится пространство X и его расширение bX такое, что $bX\not\approx\beta X$, но для любого открытого Γ $X\subset\Gamma\subset bX$, $bX\approx\beta\Gamma$. Наконец, в третьей части рассматривается структура непрерывных разбиений бикомпакта.

1. Известно, что необходимыми условиями наличия у пространства X совершенно-нормального бикомпактного расширения являются следующие:

1) X наследственно финально компактно;

2) любое бикомпактное подмножество X имеет в X счетный характер;

3) $\mathrm{sw}\,A=\mathrm{w}A$ для любого $A\subset X$, где $\mathrm{sw}\,A$ — сетевой вес в смысле Архангельского. Оказывается, что эти условия не являются достаточными. Конструкция следующего примера была предложена автору В. И. Пономаревым.

Теорема 1. *Существует пространство X, обладающее свойствами 1)—3), не имеющее совершенно-нормального бикомпактного расширения.*

Доказательство. В качестве пространства X возьмем единичный круг на плоскости: $x^2+y^2\leqslant 1$, причем база топологии во внутренних точках обычная, а на окружности определим базисные окрестности следующим образом. Базисной окрестностью точки $(1, 0)$ назовем множество

$$O_\varepsilon^\varphi=\{(x-1)^2+y^2<\varepsilon\}\cap\{(x-1)\cos\varphi+y\sin\varphi>0\}\cap X\cup\{(1,0)\},$$

где $\varepsilon>0$, $0<\varphi<\pi/2$; а базисная окрестность произвольной точки окружности получается из окрестности точки $(1, 0)$ путем поворота против часовой стрелки, совмещающего точку $(1, 0)$ с данной. Нетрудно видеть, что пространство X обладает свойствами 1)—3). Пусть существует совершенно-нормальное бикомпактное расширение vX (v — соответствующее подчинение, см. [1]). Пусть F — единичная окружность, тогда F замкнуто в X. По предположению $[F]_{vX}=\bigcap_{i=1}^{\infty}O(H_i)$, где $F<_vH_i$. H_i для любого i имеет не более счетного числа точек, принадлежащих F, не имеющих обычных окрестностей, содержащихся в H_i (в силу наследственной финальной компактности X).

Для каждой точки $a\in F$ выберем ее базу в F, состоящую из дуг $I_i(a)=[a, b_i)$, где длина $[a, b_i)=2^{-i}$ и направление от a к b_i — против часовой стрелки. Пусть W — произвольная базисная окрестность точки $(1, 0)$, $W(a)$, $a\in F$,— окрестность точки a, полученная из W поворотом против часовой стрелки. Для любой $a\in F$ выберем $I_i(a)$: $I_i(a)<_vW(a)$, $I_{i-1}(a)<_vW(a)$. Тогда существует несчетное множество $M\subset F$ такое, что $I_n(a)<_vW(a)$ при любой $a\in M$, где n постоянно для точек M (следует из счетности системы $\{I_i\}$ и несчетности множества F). Рассмотрим теперь такую окрестность W_1 точки $(1, 0)$, что длина дуги, на которую она «опирается», равна $r<2^{-n}$. Рассмотрим также соответствующие окрестности $W_1(a)$ для всех $a\in M$. Тогда, аналогично, существует несчетное множество $M_1\subset M$ и числом m такие, что для всех $a\in M_1$ $I_m(a)<_v W_1(a)$. Выберем дугу на F длины 2^{-m} такую, что в ней содержится несчетное подмножество $M_1'\subset M_1$. (Множество M_1' можно взять таким, что для любого $a\in M_1'$ существует $b\in M_1'$ такое, что направление от a к b против часовой стрелки.)

Покажем теперь, что для любой $a\in M_1'$ существует $H\subset X$: $F<_v H$ и a не имеет обычной окрестности, содержащейся в H. Действительно: возьмем окрестность $W_1(a)$, «опирающуюся» на дугу $[a, p)$. Так как $a\in M_1'$, то $[a, k)=I_m(a)<_v W_1(a)$, поэтому множества $[a, k)$ и $[p, a)$ v-далеки. Следовательно, существуют $U_1\supset[a, k)$, $U_2\supset[p, a)$ такие, что $[a, k)<_v U_1$, $[p, a)<_v U_2$, $U_1\cap U_2=\phi$. Существует $b\in M_1'$ такая, что направление от a к b против часовой стрелки. Так как $b\in M$, то $[k, p)\subset[b, p)\subset I_n(b)<_v W(b)$, поэтому $[k, p)<_v W(b)=U_3$.

Следовательно, имеем $F=[a, k)\cup[\mathrm{k}, p)\cup[p, a)<_v U_1\cup U_2\cup U_3=H$, откуда $F<_v H$. Но у точки a нет обычной окрестности, лежащей в H, так как иначе ее можно было взять не содержащей точки b и получилось бы, что она покрывается непересекающимися множествами U_1, U_2, чего не может быть.

Из несчетности M_1' следует, что существует $a\in M_1'$ такая, что a для любого i имеет обычную окрестность, содержащуюся в H_i, но существует H: $F<_v H$, что a не имеет обычной окрестности, содержащейся в H. Это противоречит предположению о том, что $O(H_i)$ образуют базу множества $[F]_{vX}$. Теорема доказана.

2. В ([2]) В. И. Пономаревым ставится следующая задача: пусть vX — бикомпактное расширение пространства X. Пусть для всякого открытого множества Γ в vX, для которого $X\subset\Gamma$, бикомпакт vX является расширением Чеха — Стоуна пространства Γ. Можно ли утверждать в этом случае, что $vX=\beta X$?

Теорема 2. *Существует пространство X и бикомпактное расширение vX такое, что:*

1) *vX негомеоморфно βX,*

2) *для любого Γ, открытого в vX, где $X\subset\Gamma$, vX гомеоморфно $\beta\Gamma$.*

Опишем пространство X, не доказывая его свойств. Пусть C — канторово совершенное множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим $\beta(C\setminus\{1\})$. Обозначим нарост $\beta(C\setminus\{1\})\setminus(C\setminus\{1\})=P$, а множество концов интервалов, смежных с C, обозначим через Y. Тогда $X=Y\cup P$ и $vX=\beta(C\setminus\{1\})$ удовлетворяют требованию теоремы 2.

3. Пусть X — бикомпакт. Рассмотрим структуру $D(X)$ всех непрерывных разбиений X с естественным порядком.

Элементы структуры $D(X)$ удобно рассматривать как пары (Y, f), где f: $X\xrightarrow{\text{на}}Y$. Тогда $1_{D(X)}=(X, \mathrm{id})$, $O_{D(X)}=(\{\text{точка}\}, \mathrm{const})$. Пусть $F=[F]\subset X$. Обозначим через $(X_F, g_F)\in D(X)$ непрерывное разбиение X, единственным неодноточечным элементом которого является множество F. Имеет место

Теорема 3. *(X_F, g_F) имеет в $D(X)$ дополнение тогда и только тогда, когда F — ретракт X.*

Определение. Пусть $(Y_0, f_0)\in D(X)$, тогда будем говорить, что для (Y_0, f_0) существует k «ортогональных» элементов $(Y_1, f_1), \ldots, (Y_k, f_k)$, если для любых i, j, $i\neq j$, $0\leqslant i\leqslant k$, $0\leqslant j\leqslant k$, имеем: $(Y_i, f_i)\wedge(Y_j, f_j)=O_{D(X)}$, $(Y_0, f_0)\vee(Y_1, f_1)\vee\ldots\vee(Y_k, f_k)=1_{D(X)}$.

Теорема 4. *Для любого $k\geqslant1$ существует бикомпакт $T^{(k)}$ и $(P_0, f_0)\in\in D(T^{(k)})$ такие, что для (P_0, f_0) существует k «ортогональных» элементов, но не существует меньшего числа «ортогональных» элементов,*

Доказательство. Сопоставим каждому элементу $D(T^{(k)})$ соответствующее замкнутое подкольцо кольца $C(T^{(k)})$, содержащее константы. Положим $T^{(k)}=\prod_{i=1}^{k}W(\omega_i+1)$. $r=(\omega_1, \ldots, \omega_k)\in T^{(k)}$. Заметим, что для любых α, β, $0\leqslant\alpha<\omega_i$, $0\leqslant\beta<\omega_j$, $i\neq j$, множества $F_1=(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, [\alpha, \omega_i), \omega_{i+1}, \ldots$

$\ldots, \omega_k)$ и $F_2=(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, [\beta, \omega_j), \omega_{j+1}, \ldots, \omega_k)$ не имеют дизъюнктных окрестностей в пространстве $T^{(k)}$.

Пусть $F=\bigcup_{i=1}^{k}(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, W(\omega_{i+1}), \omega_{i+1}, \ldots, \omega_k)$; $(P_0, f_0)\in D(T^{(k)})$ — непрерывное разбиение $T^{(k)}$, единственным неодноточечным элементом которого является множество F.

1) Покажем, что для (P_0, f_0) существует k «ортогональных» элементов. Положим $P_i=(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, W(\omega_{i+1}), \omega_{i+1}, \ldots, \omega_k)$. f_i: $T^{(k)}\to P_i$, где $f_i(x_1, \ldots, x_k)=(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, x_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_k)$. Нетрудно видеть тогда, что (P_0, f_0) и $(P_1, f_1), \ldots, (P_k, f_k)$ удовлетворяют определению.

2) Пусть для (P_0, f_0) существует n «ортогональных» элементов $(T_1, f_1), \ldots, (T_n, f_n)$, где $n\leqslant k-1$. Пусть $K_0, K_1, \ldots, K_n$ — соответствующие подкольца $C(T^{(k)})$. $f_i(F)=T_i$, так как $K_0\cap K_i=\{\mathrm{const}\}$. Зафиксируем m: $1\leqslant m\leqslant k$. Пусть $r\in[(f_i^{-1}f_i(r)\setminus r)\cap P_m]$ для любого i. Тогда $\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}f_i(r)\right|>1$.

Следовательно, $K_0\cup K_1\cup\ldots\cup K_n$ не делит точки $T^{(k)}$. Следовательно, для любого m существует $i(m)$ и существует $\alpha<\omega_m$:

$$f_{i(m)}(r)\notin f_{i(m)}(\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, [\alpha, \omega_m), \omega_{m+1}, \ldots, \omega_k).$$

Так как $n<k$, то существует $i_0\leqslant n$:

$$f_{i_0}(r)\notin f_{i_0}(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, [\alpha, \omega_s), \omega_{s+1}, \ldots, \omega_k),$$

$$f_{i_0}(r)\notin f_{i_0}(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}, [\beta, \omega_t), \omega_{t+1}, \ldots, \omega_k), \qquad s<t\leqslant k.$$

Для $x\in[\alpha, \omega_s)$ положим

$$y_x=\max\{f_{i_0}^{-1}f_{i_0}(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, x, \omega_{s+1}, \ldots, \omega_k)\cap(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}, [\beta, \omega_t), \omega_{t+1}, \ldots, \omega_k)\}.$$
$$y_x<\omega_t.$$

Положим

$$q=\sup_{x\in[\alpha, \omega_s)} y_x<\omega_t, \qquad \delta=\max\{q, \alpha\}+1.$$

Следовательно,

$$f_{i_0}(r)=f_{i_0}(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}, [\delta, \omega_t), \omega_{t+1}, \ldots, \omega_k)\cap f_{i_0}(\omega_1, \ldots, [\alpha, \omega_s), \ldots, \omega_k).$$

F — наследственно нормальный бикомпакт. Следовательно, $f_{i_0}(F)=T_{i_0}$ — наследственно нормальный бикомпакт, поэтому $T_{i_0}\setminus f_{i_0}(r)$ — нормальное пространство, $f_{i_0}(\omega_1, \ldots, [\delta, \omega_t), \ldots, \omega_k)$, $f_{i_0}(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, [\alpha, \omega_s), \omega_{s+1}, \ldots, \omega_k)$ — замкнутые непересекающиеся множества в $T_{i_0}\setminus f_{i_0}(r)$, следовательно, существуют U_1, U_2 — открытые в T_{i_0} дизъюнктные их окрестности. Следовательно, $f_{i_0}^{-1}(U_1)$ и $f_{i_0}^{-1}(U_2)$ — открытые дизъюнктные окрестности множеств $(\omega_1, \ldots, \omega_{t-1}, [\delta, \omega_t), \omega_{t+1}, \ldots, \omega_k)$ и $(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, [\alpha, \omega_s), \omega_{s+1}, \ldots, \omega_k)$, чего не может быть. Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность проф. В. И. Пономареву за внимание и поддержку.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров, В. И. Пономарев*, Вестн. Московск. унив., сер. матем., № 5, 93 (1959). [2] *В. И. Пономарев*, О проблематике в теории топологических пространств, III Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, 1973. [3] *P. A. Firby*, Lattices and Compactifications, I. Proc. London Math. Soc., v. 27 (3), 22 (1973).