Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 6

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ЯДРА МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 I 1974)

Настоящая работа посвящена анализу двух центральных задач теории Шоке — характеристике ядер подъемов максимальных операторов и проблеме единственности представляющих мер. Теория Шоке обычно строится для мер Радона на компактных пространствах или в принципиально сходных ситуациях ([1-3]). Ниже на основе теории пространств Канторовича ([4, 5]) получаются общие результаты о строении максимальных операторов на верхних решетках. Можно отметить, что все результаты содержат новую информацию даже для случая пространств непрерывных функций. В частности, устанавливаются условия, при которых следы максимальных операторов на дополнение границы Шоке анормальны, что означает справедливость теорем Шоке в пространствах измеримых функций. Устанавливается также «независимость» определения симплекса от области значений рассматриваемых операторов.

1°. Пусть X — некоторый K-линеал, Y — K-пространство, $L(X, Y)$ — множество регулярных операторов из X в Y и $L^+(X, Y)$ — положительный конус в $L(X, Y)$.

В этой работе всегда рассматриваются регулярно упорядоченные пространства. Напомним, что X называется регулярно упорядоченным, если X и $L(X, R)$, где R — K-пространство вещественных чисел, приводятся в двойственность формой $(x, f)\mapsto f(x)$, $x\in X$, $f\in L(X, R)$, причем конус X_+ положительных элементов в X замкнут в некоторой (а, значит, и в любой) топологии, согласованной с этой двойственностью.

В K-линеале X выделяется конус H. Относительно H всегда предполагается, что $\overline{H+X_+}=X$. Конус H порождает упорядоченность $\succ_H$ в $L^+(X, Y)$; именно, $T_1\succ_H T_2$ означает, что $T_1h\geqslant T_2h$, $h\in H$. Заметим, что существование максимальных операторов (=максимальных элементов в $(L^+(X, Y), \succ_H)$) равносильно условию $\overline{H+H_+}=X$. Если $P(H)$ — наименьшая верхняя решетка, натянутая на H (=конус «H-выпуклых полигонов»), то упорядоченность $\succ_{P(H)}$ называют упорядоченностью Шоке, наводимой H.

Оператор $T\in L(X, Y)$ называется граничным по Шоке, если $|T|$ максимален в упорядочении Шоке.

Теорема 1. *Множество граничных по Шоке операторов образует K-пространство (в структуре, индуцированной K-пространством регулярных операторов).*

2°. Пусть теперь X — подпространство K-пространства Z и $\mathrm{Ch}=\mathrm{Ch}(H, X, Z)$ — граница Шоке тройки (H, X, Z) (см., в частности, ([6])), т. е. компонента, на которую осуществляет проектирование наибольший (в булевой алгебре проекторов) H-максимальный проектор P_{Ch}. Как обычно, Ch^d — дизъюнктное дополнение Ch. Пусть $\mathrm{Ker}(T)$ — ядро оператора T и $N(T)$ — нулевой линеал T, т. е. $N(T)=\{z\in Z\colon\ |z|\in\mathrm{Ker}(T)\}$. Пусть Ker — общая часть ядер H-надмаксимальных операторов, определенных на Z (оператор $T\in L^+(Z, Y)$ надмаксимален, если его сужение на X максимально относительно H), а N — общая часть нулевых линеалов таких операторов.

Теорема 2. *Дизъюнктное дополнение* Ker *совпадает с границей Шоке.*

Теорема 3. *Если H коинициален X или если $\overline{H-H}=X$, то след надмаксимального оператора на компоненту* Ch^d *анормален.*

Из этих теорем, например, получается

Теорема 4. *Эквивалентны утверждения:*

а) Ker *является компонентой;*

б) $\mathrm{Ker}=N=\mathrm{Ch}^d$;

в) *Для всякого H-надмаксимального оператора T выполняется* $TP_{\mathrm{Ch}^d}=0$.

Таким образом, теоремы теории Шоке о строении максимальных операторов имеют место в пространствах измеримых функций. Точнее, справедлива

Теорема 5. *Пусть положительные формы на Z вполне линейны.*

а) *Если H коинициален X, то оператор T надмаксимален в упорядочении Шоке в том и только том случае, если $TP_{\mathrm{Ch}^d}=0$.*

б) *Если $\overline{H-H}=X$, то любой H-надмаксимальный оператор обращается в нуль на* Ch^d.

3°. Пусть H — конус в X. Выметанием Ψ_H, порожденным H, называется любое монотонное в упорядочении $\succ_H$ отображение конуса $L^+(X, Y)$ в множество максимальных операторов. Как известно, если H коинициален X и $\overline{H-H}=X$, то выметание существует. Каждое выметание порождает формулу обращения

$$Th\leqslant\Psi_H(T)h, \quad h\in H, \quad T\in L^+(X, Y).$$

Один из центральных вопросов теории Шоке — единственность выметания.

Конус H в X называется симплициальным, если им порождается единственное выметание в конусе $L^+(X, Y)$ для всякого K-пространства Y.

Лемма о фильтрации ростка. *Пусть H — коинициальный, воспроизводящий конус в X и Y — некоторое K-пространство. Росток* $\mathrm{Spr}(T, H)=\{T'\in L^+(X, Y):\ T'\succ_H T\}$ *фильтруется вправо в упорядочении $\succ_H$ в том и только том случае, если оператор $q_{H,T}$: $x\mapsto\sup T(U_x^H)$ аддитивен на $-H$ (здесь $U_x^H=\{h\in H:\ h\leqslant x\}$ — опорное H-выпуклое множество).*

Следующая теорема, доказательство которой использует лемму о фильтрации, дает внутреннюю характеристику симплициального конуса.

Теорема 6. *Эквивалентны утверждения:*

а) *Конус H симплициален;*

б) *Росток каждой положительной формы фильтруется вправо;*

в) *Для всяких $h_1, h_2\in-H$ выполняется*

$$\overline{U^H_{h_1}+U^H_{h_2}-X_+}\supset U^H_{h_1+h_2}.$$

Отметим также

Предложение 1. *Если H — симплициальная верхняя решетка, то выметание — аддитивный оператор.*

В качестве примера приведем

Предложение 2. *Если H — подпространство, обладающее свойством интерполяции Рисса* ([2]), *то конус $P(H)$ симплициален в* $\overline{P(H)-P(H)}$.

Заметим, что если H — замкнутое подпространство пространства $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q, H содержит константы и разделяет точки, то свойство симплициальности для $P(H)$ равносильно интерполяционному свойству Рисса в H. В этом случае пара $(H, C(Q))$ называется симплексом Шоке.

Подпространства со свойством интерполяции связаны, разумеется, и с разрешимостью задачи Дирихле на границе Шоке. Приведем здесь только простейшее утверждение такого сорта. Сначала дадим

Определение. Пусть $H\subset X\subset Z$. Элемент $h_1\in Z$ называется 1-аффинным, если h_1 есть предел (в Z) возрастающей сети элементов H. Элемент $h_2\in Z$ называется 2-аффинным, если h_2 есть предел убывающей сети 1-аффинных элементов.

Пусть $\overset{2}{H}$ — множество 2-аффинных элементов.

Предложение 3. *Пусть H обладает свойством интерполяции Рисса и мажорирует X, а P — проектор, причем $P\leqslant P_{\mathrm{Ch}}$.*

Тогда $P(X)\subset P(\overset{2}{H})$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. Фелпс,* Лекции о теоремах Шоке, 1968. [2] *E. Alfsen,* Compact Convex Sets and Boundary Integrals, N. Y., 1971. [3] *Z. Semadeni,* Banach Spaces of Continuous Functions, Washington, 1971. [4] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер,* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.– Л., 1950. [5] *Б. З. Вулих,* Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [6] *В. Н. Дятлов,* ДАН, т. 212, № 5, 1050 (1973).