Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 6

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Академик АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ, Б. А. РУБШТЕЙН, В. И. ЧИЛИН

ПОЛНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУПОЛЕЙ

В работе определяется понятие полного тензорного произведения топологических полуполей и изучаются его свойства. Приводится также ряд результатов о соотношении топологической и порядковой структуры в полуполе и о мерах на булевых алгебрах со значениями в топологических полуполях. Мы используем терминологию и обозначения теории топологических полуполей из ([1], [2]).

1. Внешние меры со значениями в топологических полуполях. Пусть E — топологическое полуполе. Будем говорить, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E$, где A — некоторое направление, (o) — сходится к элементу x из E, если существуют сети $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$, y_α, $z_\alpha\in E$, удовлетворяющие при любом $\alpha\in A$ неравенству $y_\alpha\leqslant x_\alpha\leqslant z_\alpha$, причем $\{y_\alpha\}$ возрастает, $\{z_\alpha\}$ убывает и

$$\sup_{\alpha\in A} y_\alpha=\inf_{\alpha\in A} z_\alpha=x.$$

Сильнейшая из топологий, в которых (o)-сходимость влечет топологическую, называется (o)-топологией (ср. ([3])). Непосредственно из аксиоматики топологического полуполя следует, что его топология слабее, чем (o)-топология.

Теорема 1. *В любом топологическом полуполе E существует единственная топология, наделяющая E структурой топологического полуполя.*

Эту топологию мы будем называть R-топологией. Из теоремы 1 получаем

Следствие. *Всякий алгебраический изоморфизм* полуполя E на полуполе E' является гомеоморфизмом относительно R-топологий в E и E' соответственно.*

Полуполе E называется универсальным, если всякое его дизъюнктное подмножество имеет точную верхнюю грань **.

Теорема 2. *Полуполе является топологически полным в R-топологии *** в том и только в том случае, когда оно универсально ****.*

Непрерывной внешней мерой на булевой алгебре ∇ со значениями в полуполе E называется отображение m: $\nabla\to E$, удовлетворяющее следующим условиям:

M1. $m(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\nabla$ и $m(x)=0$ в том и только в том случае, когда $x=0$;

M2. $m(x)\leqslant m(y)$ при $x\leqslant y$; x, $y\in\nabla$;

M3. $m(x\vee y)\leqslant m(x)+m(y)$ при всех x, $y\in\nabla$;

M4. Если сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (o)-сходится к элементу x, то $\{m(x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ o-сходится к $m(x)$.

Т. А. Сарымсаков и А. Исламов ([4]), опираясь на результаты Магарам ([5]), показали, что булева алгебра счетного типа является топологиче-

---

* Под алгебраическим изоморфизмом понимается взаимно однозначное отображение, сохраняющее алгебраические операции.

** Приведенное определение отличается от определения универсального полуполя из ([2]), однако, как нетрудно проверить, эквивалентно ему.

*** Т. е. полным относительно равномерности, порожденной R-топологией.

**** Как стало известно авторам, часть из этих результатов независимо получены Семеновой Л. Э.

ской* в том и только в том случае, когда на ней существует непрерывная внешняя числовая мера. Следующая теорема является обобщением этого утверждения для булевых алгебр несчетного типа.

Теорема 3. *Если на структурно полной булевой алгебре ∇ существует непрерывная внешняя мера со значениями в некотором топологическом полуполе, то на ∇ можно задать топологию, наделяющую ее структурой топологической булевой алгебры.*

*Обратно, если ∇ является топологической булевой алгеброй, то на ней существует непрерывная внешняя мера со значениями в тихоновском полуполе R^Δ ** при некотором Δ.*

Отображение m: $\nabla \to E$ будем называть квазимерой, если оно удовлетворяет условиям M1 и

M5. $m(x \vee y) = m(x) + m(y)$ при $x \wedge y = 0$; $x, y \in \nabla$.

Очевидно, что всякая квазимера удовлетворяет условиям M2 и M3.

Квазимера m называется мерой, если она удовлетворяет условию **M4**.

Теорема 4 (о продолжении). *Пусть m — некоторая квазимера на булевой алгебре ∇ со значениями в универсальном полуполе E. Тогда существуют единственная топологическая булева алгебра $\tilde{\nabla}$ и мера $\tilde{m}$: $\tilde{\nabla} \to E$ такие, что $\tilde{\nabla}$ содержит всюду плотную подалгебру, изоморфную ∇, и $\tilde{m}$ является продолжением m.*

При доказательстве этой теоремы существенно используется теорема 2.

Так как на любой булевой алгебре можно задать квазимеру со значениями в некотором полуполе R^Δ, то верна следующая

Теорема 5. *Для любой булевой алгебры ∇ существует топологическая булева алгебра, содержащая всюду плотную подалгебру, изоморфную ∇.*

2. Определение полного тензорного произведения топологических полуполей. Подполуполе E' полуполя E называется правильным, если для всякого множества $M \subset E'$, ограниченного сверху в E, $\bigvee M \in E'$. Можно показать, что для любого множества M в полуполе E существует наименьшее правильное подполуполе, содержащее M. Далее подполуполя E_1 и E_2 полуполя E будем называть независимыми, если $x \cdot y \neq 0$ для любых ненулевых $x \in E_1$, $y \in E_2$.

Определение. Топологическое полуполе E называется полным тензорным произведением (п.т.п.) полуполей E_1 и E_2, если существуют алгебраические изоморфизмы φ_i: $E_i \to E$, $i=1, 2$, удовлетворяющие условиям:

P1. $\varphi_i(E_i)$ — правильное подполуполе полуполя E, $i=1, 2$;

P2. Подполуполя $\varphi_1(E_1)$ и $\varphi_2(E_2)$ независимы;

P3. Наименьшее правильное подполуполе, содержащее $\varphi_1(E_1)$ и $\varphi_2(E_2)$, совпадает с E.

Отображения φ_1 и φ_2 будем называть каноническими вложениями, а п.т.п. полуполей E_1 и E_2 будем обозначать через $E_1 \bar{\otimes} E_2$.

Примеры: а) Пусть Δ_1 и Δ_2 — произвольные множества и $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ — их прямое произведение. Тогда полуполе R^Δ является п.т.п. полуполей R^{Δ_1} и R^{Δ_2}.

б) Обозначим через $S(\Omega, m)$ полуполе всех измеримых функций, определенных на вероятностном пространстве (Ω, m). Пусть (Ω_1, m_1) и (Ω_2, m_2) — вероятностные пространства и $(\Omega_1 \times \Omega_2, m_1 \times m_2)$ — их прямое произведение. Тогда полуполе $S(\Omega_1 \times \Omega_2, m_1 \times m_2)$ есть п.т.п. полуполей $S(\Omega_1, m_1)$ и $S(\Omega_2, m_2)$.

в) Для любого полуполя E и множества Δ полуполе $\prod_{t \in \Delta} E_t$, где $E_t = E$ при всех t, является п.т.п. полуполей E и R^Δ.

---

* Топологическая булева алгебра здесь и в дальнейшем в смысле работы (2).

** Через R^Δ обозначается полуполе всех функций, определенных на множестве Δ со значениями в действительной прямой R (см. (1)).

3. Свойства п.т.п. топологических полуполей. Пусть $E_1 \otimes E_2$ — тензорное произведение E_1 и E_2, рассматриваемых как коммутативные алгебры с единицей над полем R ([6], стр. 363). Каждый элемент z из $E_1 \otimes E_2$ представим (вообще говоря неоднозначно) в виде конечной суммы $z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$, где $x_k \in E_1$, $y_k \in E_2$.

Зададим отображение φ алгебры $E_1 \otimes E_2$ в $E = E_1 \bar{\otimes} E_2$, полагая

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_1(x_k) \cdot \varphi_2(y_k).$$

Нетрудно поверить, что отображение φ определено корректно и является алгебраическим изоморфизмом $E_1 \otimes E_2$ на наименьшее подкольцо в E, содержащее E_1 и E_2. Поэтому можно считать, что $E_1 \otimes E_2 \subset E_1 \bar{\otimes} E_2$, отождествляя каждый элемент z из $E_1 \otimes E_2$ с $\varphi(z) \in E_1 \bar{\otimes} E_2$.

Теорема 6. *Кольцо $E_1 \otimes E_2$ плотно в $E_1 \bar{\otimes} E_2$ в R-топологии.*

Канонические вложения φ_i: $E_i \to E_1 \bar{\otimes} E_2$, $i = 1, 2$, обладают следующими свойствами:

1) сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E_i$ (o)-сходится к $x \in E_i$ в том и только в том случае, когда сеть $\{\varphi_i(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ (o)-сходится к $\varphi_i(x)$ в $E_1 \bar{\otimes} E_2$; в частности, φ_i сохраняет грани, т. е. если $M \subset E_i$ и $\bigvee M$ в E_i существует, то $\bigvee \varphi_i(M) = \varphi_i(\bigvee M)$;

2) R-топология ((o)-топология) в $E_1 \bar{\otimes} E_2$ индуцирует R-топологию ((o)-топологию) в $\varphi_i(E_i)$, и, следовательно φ_i: $E_i \to \varphi_i(E_i)$ является гомеоморфизмом относительно R-топологий, (o)-топологий).

Следующий критерий позволит нам указать широкий класс полуполей, для которых п.т.п. существует.

Теорема 7. *П.т.п. топологических полуполей E_1 и E_2 существует тогда и только тогда, когда на их булевых алгебрах идемпотентов ∇_1 и ∇_2 можно задать меры m_i: $\nabla_i \to F_i$, $i = 1, 2$, где F_1, F_2 — топологические полуполя, для которых п.т.п. $F_1 \bar{\otimes} F_2$ существует.*

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ совокупность всех диадических булевых алгебр (см. [2], стр. 43) и через $\mathfrak{N}_1$ класс всех топологических полуполей, у которых булева алгебра идемпотентов принадлежит $\mathfrak{M}_1$. Индукцией по n определяем классы $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{N}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{M}_n$ — класс всех топологических булевых алгебр, на которых можно задать меру со значениями в некотором полуполе из класса $\mathfrak{N}_{n-1}$, а $\mathfrak{N}_n$ — класс полуполей, у которых булева алгебра идемпотентов принадлежит $\mathfrak{M}_n$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots$ и $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots$

Теорема 8. *Для того чтобы существовало п.т.п. двух топологических полуполей, достаточно, чтобы один из сомножителей принадлежал классу $\mathfrak{N}_n$ при некотором n.*

Авторам неизвестно, всякое ли топологическое полуполе принадлежит классу $\mathfrak{N}_n$ для некоторого n. С другой стороны, уже класс $\mathfrak{N}_2$ включает в себя все известные в настоящее время примеры топологических полуполей.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
7 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков*, Топологические полуполя, Ташкент, 1960. [2] *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков*, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. [3] *Б. З. Вулих*, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [4] *Т. А. Сарымсаков, А. Исламов*, Докл. АН УзССР, т. 4, 3 (1974). [5] *D. Maharam*, Ann. Math., v. 48, 154 (1947). [6] *Н. Бурбаки*, Алгебра, Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра, М., 1962. [7] *В. Э. Семенова*, Универсальные топологические полуполя и их гомоморфизмы. Кандидатская диссертация, Ташкент, 1973.