Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 530.12:531.51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ИЗОТРОПНЫЕ ПФАФФОВЫ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ С КРУЧЕНИЕМ

(Представлено академиком В. А. Фоком 12 X 1973)

Для описания гравитационных волн и для других задач теории тяготения естественно привлекать геометрию изотропных образов. Здесь предлагается тензорный аппарат для описания внутренней геометрии изотропных пфаффовых систем (распределений), обобщающий аппарат для неизотропных поверхностей [1-12]. Рассмотрим дифференцируемое многообразие V^n с метрической, но не симметричной связностью Γ и невырожденным метрическим тензором g. Пусть $X^n_{r,m}$ и $\overline{X}^n_{r,m}=X^n_{n-2m+r,n-m}$ суть взаимно оснащающие (отмечено чертой) в TV^n изотропные распределения размерностей m, $n-m$ с индуцированными метриками a и b рангов r, $n-2m+r$ и квазиортонормированными реперами

$$(\underset{1}{u},\ldots,\underset{r}{u},\ \underset{r+1}{l},\ldots,\underset{m}{l}),\quad(\underset{r+1}{k},\ldots,\underset{m}{k},\ \underset{2m-r+1}{u},\ldots,\underset{n}{u}),$$

$$\underset{i}{u}^{\alpha}\underset{i}{u}_{\alpha}=\underset{i}{u}^2=\varepsilon_i=\pm1,\quad \underset{j}{l}^2=\underset{j}{k}^2=\underset{j}{k}\underset{j}{l}-1=0,$$

$$i=1,\ldots,r,\quad 2m-r+1,\quad j=r+1,\ldots,m,\quad \alpha,\beta,\ldots=1,\ldots,n.$$

Образуем тензоры g, c (назовем его праметрическим), проекторы $\varkappa$, λ (штрих отмечает транспортирование, крест — взятие псевдообратной матрицы):

$$g_{\mu\nu}=\sum_{1}^{r}\varepsilon_i\underset{i}{u}_{\mu}\underset{i}{u}_{\nu}+\sum_{r+1}^{m}\underset{j}{l}_{\mu}\underset{j}{k}_{\nu}+\sum_{r+1}^{m}\underset{j}{k}_{\mu}\underset{j}{l}_{\nu}+\sum_{2m-r+1}^{n}\varepsilon_i\underset{i}{u}_{\mu}\underset{i}{u}_{\nu}=$$

$$=(a_{\mu\nu}+{}^0\varkappa_{\mu\nu})+({}^0\varkappa_{\nu\mu}+b_{\mu\nu})=\varkappa_{\mu\nu}+\lambda_{\mu\nu},\quad \varkappa=\varkappa^2=(\varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}\varkappa_{\alpha\cdot}^{\cdot\alpha});$$

$$c_{\mu\nu}=\Big(a_{\mu\nu}+\sum_{r+1}^{m}\underset{j}{l}_{\mu}\underset{j}{l}_{\nu}\Big)+\Big(\sum_{r+1}^{m}\underset{j}{k}_{\mu}\underset{j}{k}_{\nu}+b_{\mu\nu}\Big)=k_{\mu\nu}+l_{\mu\nu},\quad c^2=(g_{\mu}^{\lambda})=1,$$

$$a_{\mu\nu})^{+}=a^{\mu\nu},\quad (k_{\mu\nu})^{+}=c^{\mu\alpha}k_{\alpha\beta}c^{\beta\nu},\quad \varkappa^{+}=\varkappa=(\varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}),\quad \varkappa\varkappa'=k^2=a,\quad \varkappa\lambda'={}^0\varkappa.$$

Расщепление касательного многообразия и всей тензорной алгебры над V^n на неизотропные двойственные распределения получим при $\varkappa=\varkappa'$ $(X^n_{m,m}=V^n_m)$. Метрика a не зависит от выбора базиса так же, как внутренняя геометрия изотропной гиперповерхности S пространства — времени V^4 не зависит от ее параметризации: параметрические линии определяют пространственную 2-площадку (с метрикой a) и содержащую ее изотропную гиперплоскость l_α, пересекающую касательную гиперплоскость k_α по этой 2-площадке (l_α играет роль ковектора для k^α в описании X).

Параметр вдоль k-линии (световое время) есть ее проекция на переносимую вдоль нее гиперплоскость l_α [13] (аффинный параметр соответствует параллельному переносу), относясь тем не менее к описанию внутренней геометрии S. Внутренняя геометрия $X^4_{2,3}$ (l) определяет интенсивность гравитационных волн с фронтами $\{S\}$, являющимися интегральными поверхностями $X^4_{2,3}(k)$, и сама определяется параметризацией либо оснащением $\{S\}$, фиксирующими 4-скорость наблюдателя $2^{-1/2}(\mathbf{k}+\mathbf{l})$ и красное смещение. Длина метра «светового наблюдателя» равна длине его двумерной проекции и зависит от определяемого оснащением направления проектирования. Индуцированная на X связность Γ' зависит, следовательно, от оснащения (и не метрична). Поскольку праметрика для $X^n_{r,m}$ играет ту же роль, что и метрика для $V_n{}^m$ индуцируемая на X прасвязность определяется внешней прасвязностью однозначно. Но сама праметрика (как «корень» из метрики) содержит произвольные параметры, поэтому естественно считать оснащением X класс всех допустимых оснащений, а индуцированной связностью — класс всех конкретных связностей. Внутренняя геометрия $X^n_{r,m}$ по определению инварианта относительно выбора представителя класса (для $r<m$ переносимая в X длина не есть факт геометрии X, ср. ([14])).

Пусть дано тензорное поле

$$T_{\mu\ldots}{}^{\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots}{}^{\delta\ldots} = \varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}\cdots\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\beta}\cdots\lambda_{\lambda\cdot}^{\cdot\gamma}\cdots\lambda_{\varkappa\cdot}^{\cdot\delta}\cdots T_{\alpha\ldots}{}^{\nu\ldots}{}_{\gamma\ldots}{}^{\varkappa\ldots}.$$

Определим индуцированные операторы частного $(D_\rho=\partial_\rho=\partial/\partial x^\rho)$ (следовательно, и внешнего), лиевского $(D_\xi=\mathscr{L}_\xi)$ и ковариантного $(D_\rho=\nabla_\rho)$ дифференцирования с чертой и штрихами:

$$\underline{D}_\rho T_{\mu\ldots}{}^{\beta\ldots}{}_{\lambda\ldots}{}^{\delta\ldots} = \varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}\cdots\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\beta}\cdots\lambda_{\lambda\cdot}^{\cdot\gamma}\cdots\lambda_{\varkappa\cdot}^{\cdot\delta}\cdots D_\rho T_{\alpha\ldots}{}^{\nu\ldots}{}_{\gamma\ldots}{}^{\varkappa\ldots},$$

$$\partial_\rho = \varkappa_{\rho\cdot}^{\cdot\sigma}\partial_\sigma + \lambda_{\rho\cdot}^{\cdot\sigma}\partial_\sigma = \partial_\rho{}' + \partial_\rho{}'', \quad \overline{\nabla}_\rho = \nabla_\rho{}' + \nabla_\rho{}'',$$

$$\underline{\mathscr{L}}_\xi = \underline{\mathscr{L}}_{\xi'+\xi''} = \underline{\mathscr{L}}_{\xi'} + \underline{\mathscr{L}}_{\xi''} = \mathscr{L}'_\xi + \mathscr{L}''_\xi.$$

Приведем некоторые соотношения и разложения, временно отмечая действие $\varkappa$ на индекс чертой сверху, а действие λ — чертой снизу. Черта над коренной буквой (кроме ∇, Γ, S) и добавление второго штриха означают взаимозамену проекторов.

$$\underline{\mathscr{L}}_\xi T_{\mu\cdot\lambda\cdot}^{\cdot\beta\cdot\delta} = \overline{\nabla}_\xi T_{\mu\cdot\lambda\cdot}^{\cdot\beta\cdot\delta} + T_{\rho\cdot\lambda\cdot}^{\cdot\beta\cdot\delta}(\nabla_\mu{}'\xi'^\rho - L_{\mu\cdot\sigma}^{\cdot\rho\cdot}\xi''^\sigma) - T_{\mu\cdot\lambda\cdot}^{\cdot\rho\cdot\delta}(\nabla_\rho{}'\xi'^\beta - L_{\rho\cdot\sigma}^{\cdot\beta\cdot}\xi''^\sigma) +$$
$$+ T_{\mu\cdot\rho\cdot}^{\cdot\beta\cdot\delta}(\nabla_\lambda{}''\xi''^\rho - \overline{L}_{\lambda\cdot\sigma}^{\cdot\rho\cdot}\xi'^\sigma) - T_{\mu\cdot\lambda\cdot}^{\cdot\beta\cdot\rho}(\nabla''_\rho\xi''^\sigma - \overline{L}_{\rho\cdot\sigma}^{\cdot\delta\cdot}\xi'^\sigma),$$

$$\nabla_\mu{}'v_\nu{}' = \underline{\partial}_\mu{}'v_\nu{}' - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}v_\lambda{}', \quad \nabla_\mu{}''v'^\lambda = \underline{\partial}_\mu{}''v'^\lambda + {}'\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v_\lambda{}',$$

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\bar\mu\bar\nu}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\underline{\mu}\bar\nu}, \quad \underline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\underline{\lambda}}_{\bar\mu\bar\nu}, \quad \overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\underline{\mu}\underline{\nu}},$$

$$\underline{\Gamma}'^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\bar\mu\underline{\nu}}, \quad \overline{\Gamma}'^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{\underline{\lambda}}_{\underline{\mu}\bar\nu}, \, S_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}, \quad {}'S_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\underline{\mu}\bar\nu\cdot}^{\cdot\cdot\bar\lambda}, \ldots,$$

$$\overline{\nabla}_\mu\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\lambda} = 0, \quad \nabla_\mu\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\lambda} = H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} + L_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\lambda\cdot} - \overline{H}_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} - \overline{L}_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\lambda\cdot},$$

$$L_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\lambda\cdot} = \varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}\varkappa_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda}\nabla_\alpha\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\beta}, \quad H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} = \varkappa_{\mu\cdot}^{\cdot\alpha}\varkappa_{\nu\cdot}^{\cdot\beta}\nabla_\alpha\varkappa_{\beta\cdot}^{\cdot\lambda} = H_{[\mu\nu]\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} + H_{(\mu\nu)}{}^{\cdot\cdot\lambda} = M_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} + N_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda};$$

$$\nabla_\mu v_{\nu\cdot}^{\cdot\lambda} = \overline{\nabla}_\mu v_{\nu\cdot}^{\cdot\lambda} + (H_{\mu\rho\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} + \overline{H}_{\mu\rho\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} - L_{\mu\cdot\rho}^{\cdot\lambda\cdot} - \overline{L}_{\mu\cdot\rho}^{\cdot\lambda\cdot})v_{\nu\cdot}^{\cdot\rho} - (H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho} + \overline{H}_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho} -$$
$$- L_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\rho\cdot} - \overline{L}_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\rho\cdot})\, v_{\rho\cdot}^{\cdot\lambda};$$

$$\overline{\nabla}_\mu a_{\nu\lambda} = \varkappa_{\nu\rho}(H_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\rho} - \overline{L}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\rho\cdot}) + \varkappa_{\lambda\rho}(H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho} - \overline{L}_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\rho\cdot}) \not\equiv 0, \quad \overline{\nabla}_\mu\varkappa_{\nu\lambda} \not\equiv 0, \quad \overline{\nabla}_\mu g_{\nu\lambda} \not\equiv 0,$$

$$\partial'_{[\mu}\partial'_{\nu]} = \Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda}\partial_\lambda{}'', \quad 2\nabla'_{[\mu}\nabla'_{\nu]}v'^\lambda = K_{\mu\nu\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}v'^\rho + 2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\nabla_\rho{}''v'^\lambda - 2S'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot}\nabla_\rho{}'v'^\lambda,$$

$$\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} = M_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda} - \underline{S}_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\lambda}, \quad 2\nabla'_{[\mu}\nabla'_{\nu]}v_\lambda{}'' = -{}'\overline{K}_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}v_\lambda{}'' + 2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho}\nabla_\rho{}''v_\lambda{}'' - 2S'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot}\nabla_\rho{}'v_\lambda{}'',$$

$$K_{\mu\nu\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \underline{2}\partial'_{[\mu}\Gamma'^{\lambda}_{\nu]\rho} + 2\Gamma'^{\lambda}_{[\mu|\sigma|}\Gamma'^{\sigma}_{\nu]\rho} - 2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\,{}'\Gamma^\lambda_{\sigma\rho},$$

$${}'\overline{K}_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} = 2\partial'_{[\mu}{}''\Gamma^{\rho}_{\nu]\lambda} + 2''\Gamma^{\rho}_{[\mu|\sigma|}{}''\Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda} - 2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\Gamma''^{\rho}_{\sigma\lambda}.$$

Здесь мы ввели первый (H) и второй (L) тензоры внешней неголономности $X^{n}_{r,m}$ (M — тензор внешнего кручения, N — внешней кривизны X), тензор инволютивности Σ, обобщенные тензоры Схоутена K, $'K$, тензор $\underline{S}$ вынужденного внешнего кручения, тензоры $'S$, $\underline{S}'$ смешанного кручения $\overline{X}$. Действие $\overline{\nabla}$ предполагает разложенность объекта на проекции. Для инволютивного распределения $\Sigma=0$, для геодезического $H=L=0$, для экстремального $c^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\lambda}\equiv H^{\lambda}=0$, $L_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\rho}\equiv L_{\lambda}=0$. Изотропная поверхность ($\Sigma=0$, $r<m$) имеет нулевую внутреннюю кривизну при $K=0$, нулевое внутреннее кручение при $S'=0$. Условия $\mathscr{L}_{\xi}a_{\mu\nu}=0$, $\underline{\mathscr{L}}_{\xi}a_{\mu\nu}=0$ определяют внешнюю и внутреннюю изометрии X. В частности, существование в X m линейно независимых векторов Киллинга для X дает два типа однородности X, а условия $\mathscr{L}_{\xi'}{'a}_{\mu\nu}=0$, $\mathscr{L}_{\xi''}{''a}_{\mu\nu}=0$ определяют его внешнюю и внутреннюю жесткость. Распределения наибольшей подвижности являются жанровыми, а размерности соответствующих групп движения образуют жанры V^{n} ([12в]).

Поскольку в изотропном случае ряд функций метрики выполняют проекторы и праметрика (версор для проекций), разумно ввести в рассмотрение группы изопроекций и изопраметрий. Тензоры M, Σ, $\underline{S}$ соответствуют абсолютному, относительному и вынужденному кручению X. В физическом пространстве V_3^4 M есть тензор синхронизуемости часов по контуру: несинхронизуемость их можно отнести либо к вращению Σ, либо к кручению $\underline{S}$, либо к их совокупности M. Допущение кручения пространства — времени приписывает ему свойства, аналогичные свойствам тела с дислокациями.

Приведем для X уравнения Гаусса (для A), Кодацци (III) и Риччи (B), а также для остальных проекций тензора Римана R, и уравнения Эйнштейна ($K_{\mu\nu}=K_{\mu\rho\nu}^{\rho}$, $'S_{\lambda}={'S}_{\lambda\rho}^{\rho}$, $I_{\mu\nu}=T_{\overline{\mu\nu}}$, $J_{\mu\nu}=T_{\overline{\mu}\underline{\nu}}$):

$$R_{\overline{\mu\nu\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\overline{\varkappa}}=A_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}=K_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}-2L_{[\mu\cdot|\rho|}^{\cdot\varkappa\cdot}H_{\nu]\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\rho},\quad R_{\overline{\mu\nu}\underline{\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\underline{\varkappa}}=B_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}=$$

$$={'K}_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}-2H_{[\mu|\rho|\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}L_{\nu]\cdot\lambda}^{\cdot\rho\cdot},$$

$$R_{\overline{\mu\nu\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\underline{\varkappa}}=\mathrm{III}_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}=2\nabla'_{[\mu}H_{\nu]\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}+2S'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot}H_{\rho\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}+2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho}\overline{L}_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot},$$

$$R_{\overline{\mu\nu}\underline{\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\overline{\varkappa}}=\mathrm{III}'^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\nu\lambda\cdot}=-2\nabla'_{[\mu}L_{\nu]\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot}-2S'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot}L_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot}-2\Sigma_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho}\overline{\overline{H}}_{\rho\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa},$$

$$R_{\overline{\mu}\underline{\nu}\overline{\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\underline{\varkappa}}=N_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}=-\nabla'_{\mu}\overline{L}_{\nu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot}-\nabla''_{\nu}H_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}+(L_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\rho\cdot}+2\underline{S}'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot})H_{\rho\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}+$$

$$+(\overline{L}_{\nu\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}-2''S_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho})\overline{L}_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot},$$

$$R_{\overline{\mu}\underline{\nu\lambda}\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\overline{\varkappa}}=N'^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\nu\lambda\cdot}=\nabla_{\mu}{'\overline{\overline{H}}}_{\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa}+\nabla_{\nu}''L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot}-(L_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\rho\cdot}+2\underline{S}'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\nu\cdot})L_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa\cdot}-$$

$$-(\overline{L}_{\nu\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}-2''S_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho})\overline{\overline{H}}_{\rho\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\varkappa},$$

$$K_{\mu\nu}-\nabla_{\mu}{'\overline{L}}_{\nu}-\nabla_{\rho}''H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho}+H_{\mu\nu\cdot}^{\cdot\cdot\rho}L_{\rho}+2\underline{S}'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\sigma\cdot}H_{\rho\nu\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}+(\overline{L}_{\sigma\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}-2''S_{\mu\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\rho})\overline{L}_{\rho\cdot\nu}^{\cdot\sigma\cdot}-$$

$$-{}^{1}/_{2}Ra_{\mu\nu}=-\varkappa I_{\mu\nu}+\Lambda a_{\mu\nu}-2\Big[\nabla'_{[\mu}L_{\rho]\cdot\lambda}^{\cdot\rho\cdot}+S'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\sigma\cdot}L_{\rho\cdot\lambda}^{\cdot\sigma\cdot}+\Sigma_{\mu\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\rho}\overline{\overline{H}}_{\rho\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}+$$

$$+\nabla''_{[\lambda}\overline{L}_{\rho]\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}+S''^{\cdot\cdot\rho}_{\lambda\sigma\cdot}\overline{L}_{\rho\cdot\mu}^{\cdot\sigma\cdot}+\Sigma_{\lambda\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\rho}H_{\rho\mu\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}+\nabla_{\mu}{'S}_{\lambda}''-\nabla_{\lambda}''{''S}_{\mu}+\nabla_{\rho}''{''S}_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\rho}-$$

$$-\underline{S}_{\mu\rho\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\overline{\overline{H}}_{\sigma\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\rho}+S''^{\cdot\cdot\sigma}_{\rho\lambda\cdot}\overline{L}_{\sigma\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}+{''S}_{\rho}(L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\rho\cdot}+2\underline{S}'^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\lambda\cdot})-S_{\rho}''(\overline{L}_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\rho\cdot}-2''S_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\rho})\Big]-$$

$$-{}^{1}/_{2}R^{0}\varkappa_{\mu\lambda}=-\varkappa J_{\mu\lambda}+\Lambda^{0}\varkappa_{\mu\lambda}.$$

Недостающие равенства получаются обращением проекторов.

Случай $\lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\lambda}=k_{\mu}l^{\lambda}$ соответствует изотропно-монадному, $\lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\lambda}=k_{\mu}l^{\lambda}+u_{\mu}u^{\lambda}$ — изотропно-диадному, $\lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\lambda}=u_{\mu}u^{\lambda}$ — монадному Зельманова ([11]) и $\lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\lambda}=u_{\mu}u^{\lambda}-v_{\mu}v^{\lambda}$ — диадному ([12а, в]) формализмам.

В рамках монадного формализма рассмотрим, например, плотность гравитационной энергии. В качестве потенциала гравитационного поля примем 4-скорость наблюдателя $u_\alpha(x)$. Потенциал в точке $(x+\delta x)$, снесенный в точку (x) по геодезическому отрезку длины δx с временной составляющей δu и пространственной (вдоль $\underline{v}$) δv, отличается от него на величину

$$F_\alpha \delta x = (f_\alpha + \delta f_\alpha + \ldots)\delta x = g_\alpha \delta u + h_\alpha \delta v + {}^1/_2 \dot{g}_\alpha \delta u^2 + {}^1/_2 h_\alpha{}' \delta v^2 + \\ + (g_\alpha{}' - {}^1/_2 N_{\alpha\beta} v^\beta)\, \delta u\, \delta v + \ldots,$$

$$-\nabla_\beta u_\alpha = u_\beta g_\alpha + h_{\beta\alpha}, \quad h_\alpha = h_{\beta\alpha} v^\beta, \quad N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\rho\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}, \quad (\cdot) = \nabla_u, (') = \nabla_v.$$

На единицу массы пробной частицы в мировой точке $(x+\delta x)$ действует гравиинерциальная (наименования вводим по ходу дела) сила f, включающая в себя (с некоторыми множителями) инерциальную силу g_α (ускорение свободного падения) и инерционную силу h_α, составленную из деформационной ([11]) $h_{(\beta\alpha)} v^\beta$ и кориолисовой $h_{[\beta\alpha]} v^\beta$ сил ($h_{\beta\alpha} u^\gamma$ — тензор внешней неголономности пространства ([12])). Вместе с приливной δf, относительной приливной ${}^1/_2 \delta^2 f$ и т. д. 4-силами получаем полную 4-силу F. Величину $w_g = F^2/(8\pi)$ можно рассматривать как плотность гравитационной энергии. Гравитационно-волновые эффекты проявляются во второй дифференциальной окрестности наблюдателя. В волновой зоне, если она есть, преобладают поперечные компоненты кривизны ($N_{\alpha\beta}$), из которых по типу нелокального инварианта Зельдовича ([16]) можно получить выражение для числа гравитонов в объемной гравитационной волне ([12в]).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических
измерений
Менделеево Московской обл.

Поступило
6 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. F. Gauss*, Disquisiones Generales Circa Superficies Curvas, 1827. [2] *A. Foss*, Math. Ann., v. 16, 129 (1880). [3] *G. Ricci*, Rend. Accad. di Li, Roma (4), v. 41, 203 (1888). [4] *H. Kühne*, Arch. d. Math. u. Phys. (3), B. 4, 300 (1903). [5] *J. A. Schouten, E. R. van Kampen*, Math. Ann., v. 103, 752 (1930). [6] *P. Dienes*, J. Math. (9), v. 11, 255 (1932). [7] *J. A. Schouten*, Ricci Calculus, Berlin, 1954. [8] *G. Daŭtcourt*, J. Math. Phys., v. 8, 1492 (1967). [9] *J.-B. Kammerer*, C. R., v. 264, (1967). [10] *Н. Г. Галстян*, Сборн. Гравитация и теория относительности, в. 4—5, Казань, 1968, стр. 164, 168. [11] *А. Л. Зельманов*, Кандидатская диссертация, МГУ, 1944; ДАН, т. 107, 815 (1956); ДАН, т. 209, № 4, 822 (1973). [12] *Р. Ф. Полищук*, а) Кандидатская диссертация, МГУ, 1971; б) ЖЭТФ, т. 62, 5 (1972); в) Вестн. Московск. унив., физ., астрон., т. 14, № 1 3 (1973); г) ДАН, т. 208, 1321 (1973); т. 209, 76 (1973). [13] *В. И. Голиков*, Сборн. Гравитация и теория относительности, в. 4—5, Казань, 1968, стр. 63. [14] *Л. И. Мандельштам*, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, «Наука», 1972, стр. 166. [15] *У. Пресс, К. Торн*, УФН, т. 110, 569 (1973). [16] *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 1971, стр. 84.