

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ
КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ**

В вопросах теории аппроксимации целыми функциями на вещественной оси часто бывает целесообразно построить целую функцию конечной степени, обладающую определенными свойствами. В этой заметке мы показываем, что некоторые несобственные интегралы, зависящие от параметра, представляют собой целую функцию конечной степени. Прежде всего доказывается следующая

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(t, u)$ непрерывная для $u > 0$ и аналитическая по t внутри каждой конечной области. Тогда для аналитической функции

$$F(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t, u) \frac{du}{u^2 + t^2} \quad (1)$$

имеет место формула

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F(ti + \varepsilon) - F(ti - \varepsilon)\} = -\pi i \frac{\varphi(ti, t)}{t}. \quad (2)$$

Доказательство. В равенстве (1), полагая $t = t_0i + \varepsilon$, затем $t = t_0i - \varepsilon$ и вычитая из первого второе, находим

$$\begin{aligned} \omega(t_0, \varepsilon) &= F(t_0i + \varepsilon) - F(t_0i - \varepsilon) = \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(t_0i + \varepsilon; u) \left\{ \frac{1}{u^2 + (t_0i + \varepsilon)^2} - \frac{1}{u^2 + (t_0i - \varepsilon)^2} \right\} du + \\ &+ \eta_1(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \varphi(t_0i + \varepsilon; u) \frac{-4\varepsilon i t_0 du}{(u^2 - t_0^2)^2 + 4t_0^2 \varepsilon^2} + \eta_1^*(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_1^*(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Представим последний интеграл в виде

$$\omega(t_0; \varepsilon) = -4\varepsilon i t_0 \left\{ \int_0^{t_0 - \varepsilon \lambda} + \int_{t_0 - \varepsilon \lambda}^{t_0 + \varepsilon \lambda} + \int_{t_0 + \varepsilon \lambda}^{\infty} \right\} + \eta_1^*(\varepsilon) = J_{1, \varepsilon} + J_{2, \varepsilon} + J_{3, \varepsilon} + \eta_1^*(\varepsilon).$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{|u - t_0| > \varepsilon \lambda} \frac{\varepsilon \varphi(t_0i + \varepsilon; u) du}{(u^2 - t_0^2)^2 + 4t_0^2 \varepsilon^2} \right| &\leq \int_{|u - t_0| > \varepsilon \lambda} \frac{|\varphi(t_0i + \varepsilon; u)| du}{(\varepsilon \lambda - \varepsilon^2)^2 + 4t_0^2 \varepsilon^2} < \\ &< \frac{C\varepsilon}{\varepsilon^{2\lambda}} \int_{|u - t_0| > \varepsilon \lambda} |\varphi(t_0i + \varepsilon, u)| du = C^* \varepsilon^{1-2\lambda}, \end{aligned} \quad (4)$$

где C и C^* — абсолютные константы, не зависящие от ε .

Неравенство (4) показывает, что при $0 < \lambda < 1/2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{1, \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{3, \varepsilon} = 0.$$

Таким образом, из (3) следует, что

$$\begin{aligned}\omega(t_0, \varepsilon) &= -4\varepsilon i t_0 \int_{t_0 - \varepsilon^\lambda}^{t_0 + \varepsilon^\lambda} \frac{\varphi(t_0 i + \varepsilon, u) du}{(u^2 - t_0^2)^2 + 4t_0^2 \varepsilon^2} + \eta_2(\varepsilon) = \\ &= -4\varepsilon i t_0 \varphi(t_0 i + \varepsilon, t_0) \int_{t_0 - \varepsilon^\lambda}^{t_0 + \varepsilon^\lambda} \frac{du}{(u^2 - t_0^2)^2 + 4t_0^2 \varepsilon^2} + \eta_3(\varepsilon),\end{aligned}$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_3(\varepsilon) = 0.$$

Полагая $u = x + t_0$, а затем $x = \varepsilon y$, находим

$$\begin{aligned}\omega(t_0, \varepsilon) &= -\frac{i\varphi(t_0 i + \varepsilon, t_0)}{t_0} \int_{-\varepsilon^{-(1-\lambda)}}^{\varepsilon^{-(1-\lambda)}} \frac{dy}{1 + y^2} + \eta_3(\varepsilon) = \\ &= -\frac{i}{t_0} \varphi(t_0 i + \varepsilon, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} + \eta_3^*(\varepsilon) = -\frac{\pi i}{t_0} \varphi(t_0 i + \varepsilon, t_0) + \eta(\varepsilon),\end{aligned}$$

причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_3^*(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$.

Из последнего равенства при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует формула (2).
Следствие 1. Полагая

$$\varphi(t, u) = -4 \sin t \frac{u^{s+2}}{e^u - e^{-u}},$$

для функции

$$\mathcal{F}_1(t) = -4 \sin t \int_0^\infty \frac{u^{s+2} du}{(e^u - e^{-u})(u^2 + t^2)}$$

получаем формулы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\mathcal{F}_1(ti + \varepsilon) - \mathcal{F}_1(ti - \varepsilon)\} = \frac{4 \sin ti \cdot t^{s+2}}{e^t - e^{-t}} \frac{\pi i}{t} = -2\pi t^{s+1}.$$

Следствие 2. Полагая

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, u) &= e^{-u} u^s [(a_0 + a_1 u + a_2 t + a_3 u t + a_4 u^2 + a_5 t^2) \cos t + \\ &+ (b_0 + b_1 u + b_2 t + b_3 u t + b_4 u^2 + b_5 t^2) \sin t],\end{aligned}$$

можно выбирать коэффициенты a_i и b_i , $i=1, 2, 3, 4, 5$, такими, чтобы при подходе к мнимой оси справа и слева на плоскости t функция

$$\mathcal{F}_1^*(t) = \int_0^\infty \varphi_1(t, u) \frac{du}{u^2 + t^2}$$

имела ту же самую разность $-2\pi t^{s+1}$, что и функция $\mathcal{F}_1(t)$, т. е. выполнялось равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\mathcal{F}_1^*(ti + \varepsilon) - \mathcal{F}_1^*(ti - \varepsilon)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\mathcal{F}_1^*(ti + \varepsilon) - \mathcal{F}_1^*(ti - \varepsilon)\}.$$

В самом деле, в силу теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\mathcal{F}_1^*(ti + \varepsilon) - \mathcal{F}_1^*(ti - \varepsilon)\} &= -\frac{\pi i}{t} \varphi_1(ti, t) = \\ &= -\pi i e^{-t} t^{s-1} \{(a_0 + a_1 t + a_2 i t + a_3 i t^2 + a_4 t^2 + a_5 t^2) \cos t + \\ &+ (b_0 + b_1 t + b_2 i t + b_3 i t^2 + b_4 t^2 - b_5 t^2) \sin it\} = -2\pi t^{s+1}.\end{aligned}$$

Отсюда путем сравнения соответствующих коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, u) &= e^{-u} u^s \{ [-2ut + a(t^2 + u^2)] \cos t + [bu^2 + (b+2)t^2] \sin t \} = \\ &= e^{-u} u^s \{ 2(t^2 \sin t - ut \cos t) + a_1(u^2 + t^2) \cos t + b_1(u^2 + t^2) \sin t \}, \end{aligned}$$

где a_1 и b_1 суть произвольные неопределенные коэффициенты.

Итак, имеем

$$\mathcal{F}_1^*(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^s \left[\frac{2(t^2 \sin t - ut \cos t)}{u^2 + t^2} + (a \cos t + b \sin t) \right] du.$$

Отсюда, выбирая $a=0$ и $b=-1$, находим

$$\mathcal{F}_1^*(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^s \frac{(t^2 - u^2) \sin t - 2ut \cos t}{u^2 + t^2} du.$$

Далее, в силу той же теоремы, для функции

$$\mathcal{F}_2(t) = 4 \cos t \int_0^\infty \frac{u^{s+2} du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)}$$

аналогичным способом находим

$$\mathcal{F}_2^*(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^s \frac{(t^2 - u^2) \cos t + 2ut \sin t}{u^2 + t^2} du.$$

Следовательно, функцию $\xi(t) = \mathcal{F}_1(t) - \mathcal{F}_1^*(t)$ можно представить в виде

$$\xi(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{s+2}}{1 - e^{-2u}} \left[\frac{4 \sin t}{u^2 + t^2} - \frac{1 - e^{-2u}}{u^2} \frac{(t^2 - u^2) \sin t - 2ut \cos t}{u^2 + t^2} \right] du.$$

Очевидно, что $\xi(t)$ есть целая функция первой степени.

Аналогично этому,

$$\xi_*(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{s+2}}{1 + e^{-2u}} \left[\frac{4 \cos t}{u^2 + t^2} - \frac{1 + e^{-2u}}{u^2} \frac{(t^2 - u^2) \cos t + 2ut \sin t}{u^2 + t^2} \right] du$$

является также целой функцией первой степени.

Примечание. Целая функция первой степени $\xi_*(t)$ впервые была использована в исследованиях О. Н. Бернштейна ⁽¹⁾, а функция $\xi(t)$ — в нашей работе ⁽²⁾.

Теорема 2. Если функция $\varphi(x, y)$ непрерывна в точке $(x_0, 0)$ и $\varphi(x, y)/(1+x^2) \in \mathcal{L}(-\infty, \infty)$ при каждом $y, y \geq 0$, то для функции

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{y \varphi(t, y) dt}{y^2 + (t-x)^2} \quad (5)$$

справедливо равенство

$$F(x_0; +0) = \varphi(x_0; +0).$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\int_{x+\delta}^\infty \frac{y \varphi(t, y) dt}{y^2 + (t-x)^2} = \int_{x+\delta}^\infty \frac{t^2 + 1}{y^2 + (t-x)^2} \frac{y \varphi(t, y)}{1+t^2} dt \ll M_\delta(x) \int_{x+\delta}^\infty \frac{y |\varphi(t, y)| dt}{1+t^2}, \quad (6)$$

$$M_\delta(x) = \sup_{|t-x| \geq \delta} \frac{t^2 + 1}{(t-x)^2} < +\infty.$$

Неравенство (6) показывает, что интеграл (5) сходится равномерно при каждом $y > 0$. Далее, для любого $\delta > 0$ имеем

$$|F(x_0, y) - \varphi(x_0, y)| \leq \frac{y}{\pi} M_\delta(x_0) \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \delta} + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} \right] \frac{|\varphi(t, y) - \varphi(x_0, y)| dt}{1+t^2} + \\ + \sup_{|t-x_0| \leq \delta} |\varphi(t, y) - \varphi(x_0, y)|.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow +0} |F(x_0, y) - \varphi(x_0, y)| \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow 0} \sup_{|t-x_0| \leq \delta} |\varphi(t, y) - \varphi(x_0, y)|.$$

Так как правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, теорема 2 доказана.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
24 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937. ² И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 429 (1946).